

Discontinuous Galerkin Verfahren in der CFD

Dr. Manuel Keßler

Institut für Aerodynamik und Gasdynamik
Universität Stuttgart

Status Quo - Aerodynamik

Verfahren

- Finite Volumen Codes 2. Ordnung im Raum
- Zeitintegration 1.-4. Ordnung (Runge-Kutta o.ä.)
- (Block-)strukturierte Gitter (FLOWer) oder auch unstrukturiert (Tau)

Modell

- RANS-Gleichungen (URANS)
- Weiterentwicklung momentan nur durch Kopplung (Struktur, Akustik, ...) und Tuning
⇒ **Stand ca. 1985**

Motivation: Strömungsphänomene

Hubschrauber

Vorlaufendes Blatt

Rücklaufendes Blatt

Blattspitze

Mastnachlauf

Blatt-Wirbel-Interaktion

HSI-Lärm

Blattdynamik



Allgemein

Stoß-/Grenzschichtinteraktion

Dynamic Stall

instationäre 3D-Strömung

hochkomplexe Geometrie

Wirbelerhalt

Aeroakustik

Aeroservoelastik

Weiterentwicklung Strömungslöser

Ziele

- neuere physikalische Modelle (DES)
- unstrukturierte Gitter
- Diskretisierung höherer Ordnung



Anwendung

- bessere Parallelisierung
- Anpassung an Rechnerentwicklung

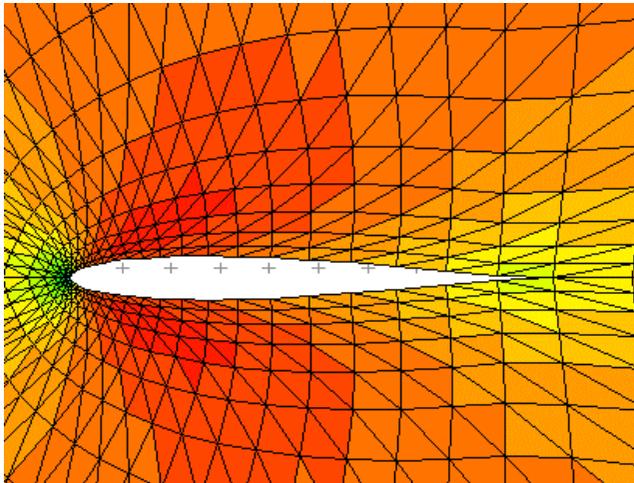


Implementierung

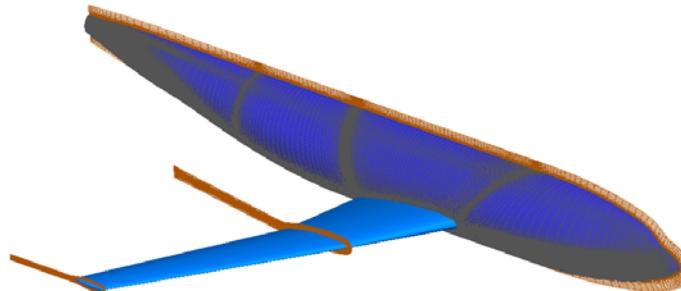
Warum unstrukturierte Gitter?

Vernetzungsaufwand (Preprocessing) bei strukturierten Gittern und komplexer Geometrie oft größter Zeitfaktor

einfach



anstrengend



utopisch



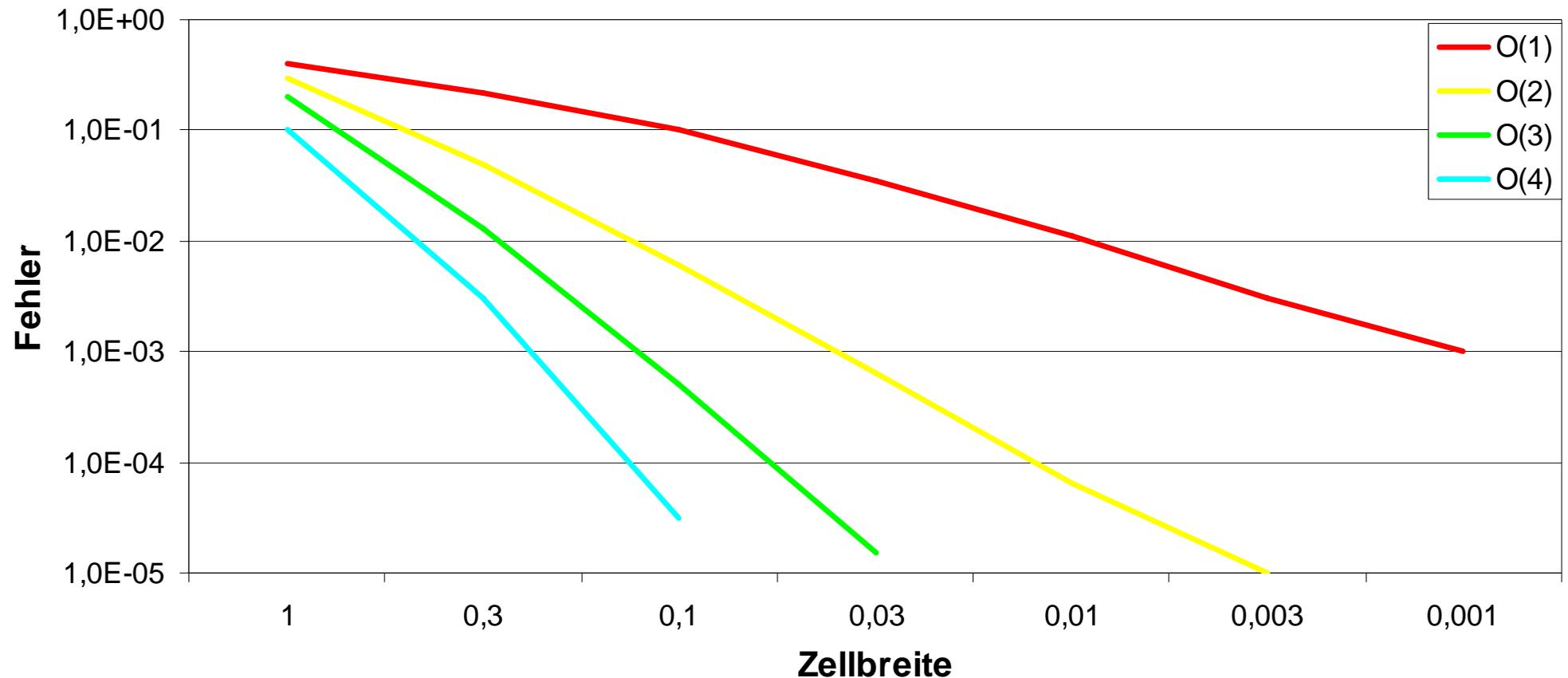
Warum höhere Ordnung?

Fehlerterm bei p-ter Ordnung: $F_p(h) \approx \alpha \cdot \left(\frac{h}{\lambda}\right)^p$

- besseres Verfahren
- höhere Gitterauflösung
- höhere Ordnung

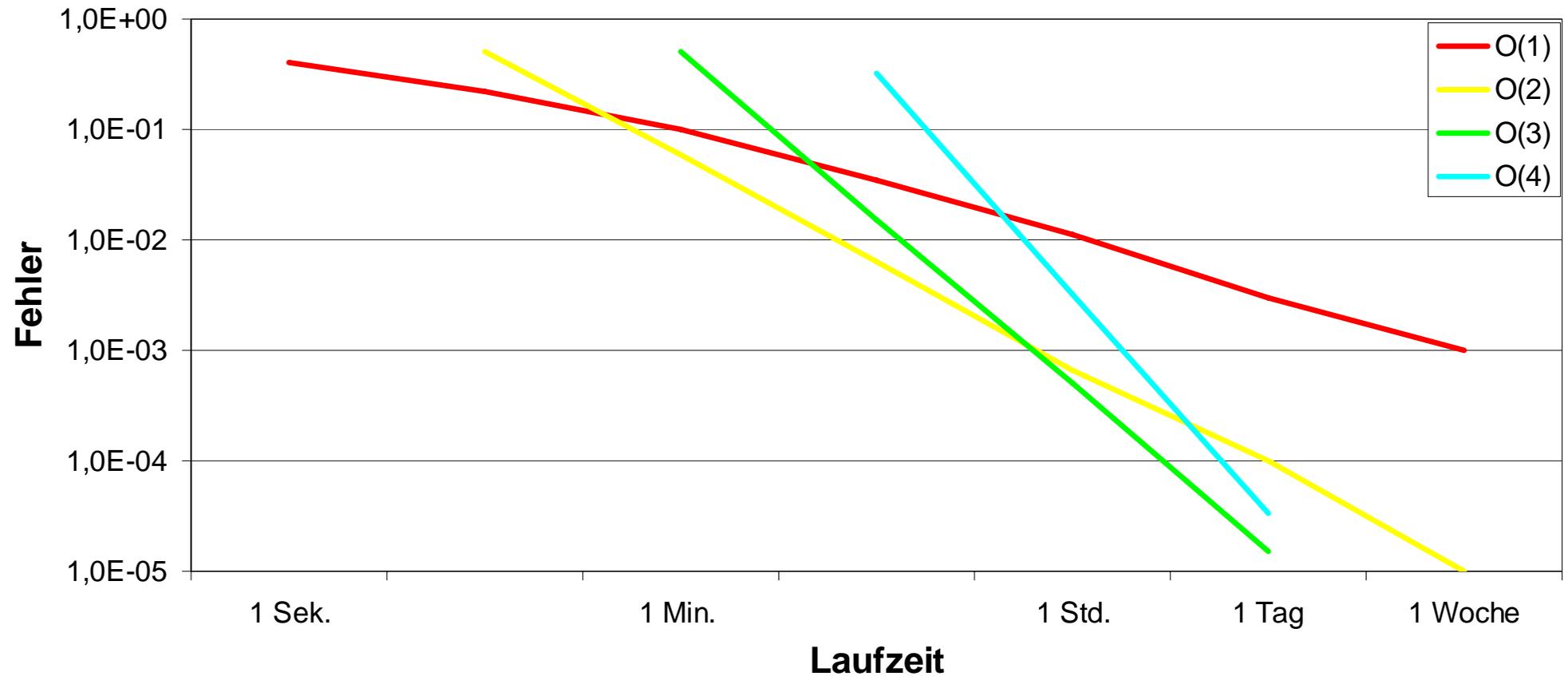
Warum höhere Ordnung? (II)

Fehler über Zellbreite



Warum höhere Ordnung? (III)

Fehler über Laufzeit



Warum höhere Ordnung? (IV)

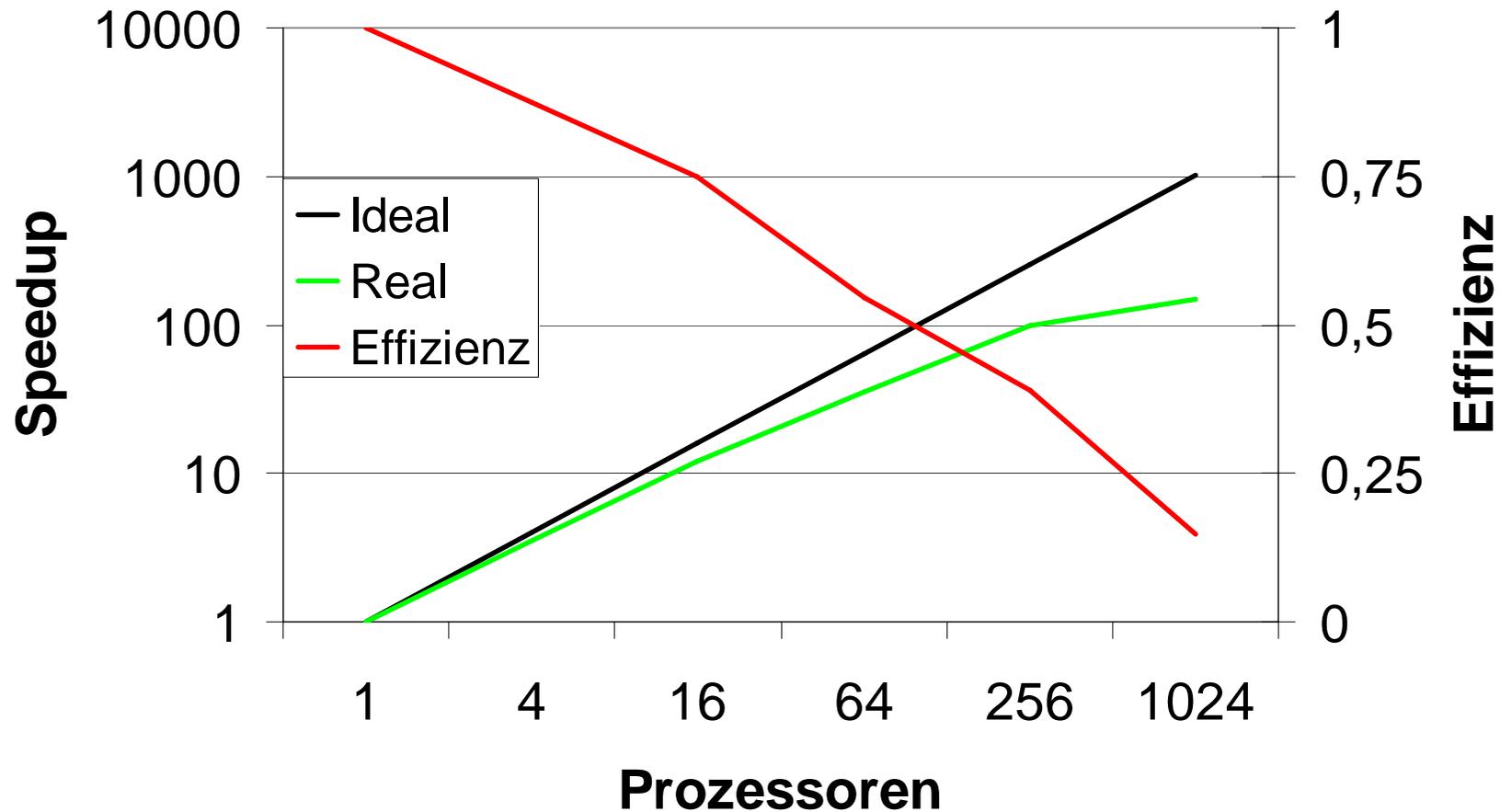
Ein Verfahren hoher Ordnung rechnet sich bei

- hohen Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse *und*
- „glatter“ Lösung *und*
- korrekter Wiedergabe der Geometrie

sonst eher nicht!

Parallelisierung

Finite Volumen Code



Rechnerentwicklung

- Skalare Maschinen (Cluster) deutlich billiger/schneller in Peak-Performance als Vektorrechner (Faktor 6-15)
- aber nur 2-10% statt 30-50% sustained
- ungünstig: Speicherbandbreite pro Rechenleistung
- gleiches Problem zukünftig auch für Vektorrechner

Zielrichtung

- viele FLOPs pro Speicherzugriff (hochwertige Verfahren)

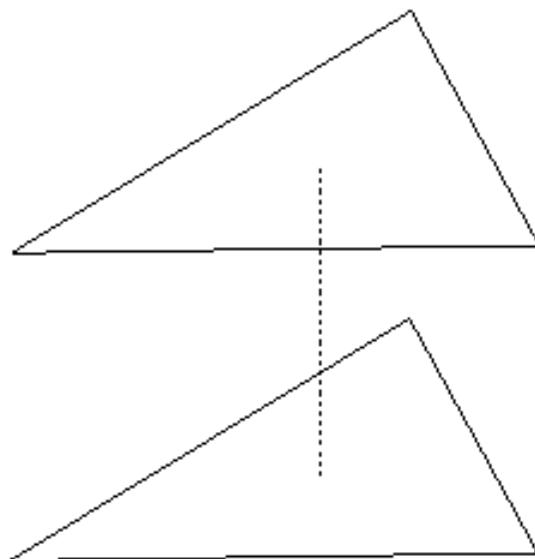
Discontinuous Galerkin

Verfahren

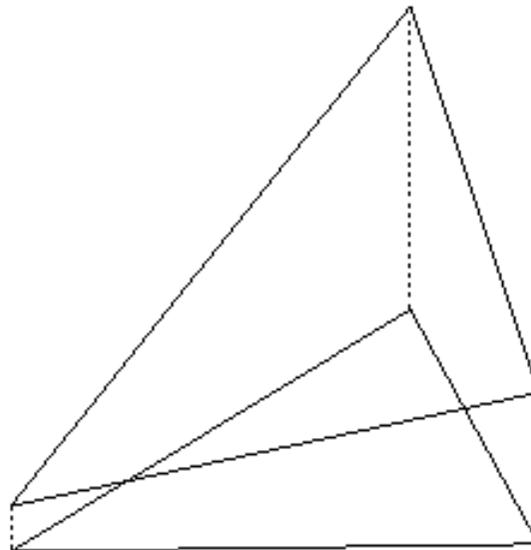
- Klassische Finite Elemente mit polynomialen Ansatz- und Testfunktionen \Rightarrow umfangreiche Theorie vorhanden
- Träger beschränkt auf geometrische Primitive (Dreiecke, Vierecke, Tetraeder, ...) \Rightarrow unstetig
- Unstetigkeiten werden durch Flussfunktionen behandelt
- 1. Ordnung äquivalent zu Finite Volumen

Discontinuous Galerkin (II)

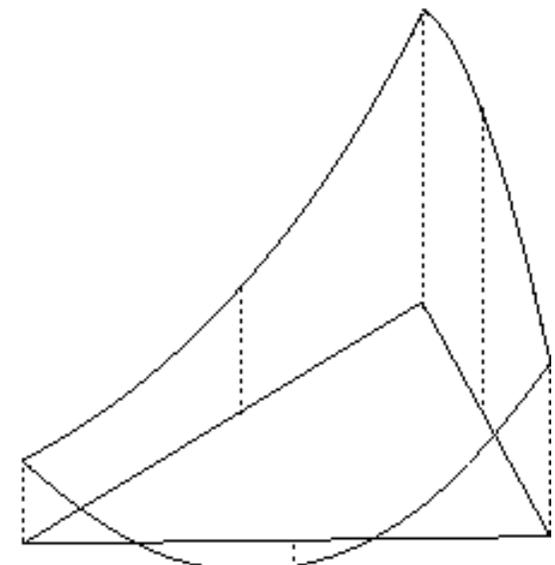
Ansatzfunktionen



$p=0$
 $O=1$



$p=1$
 $O=2$



$p=2$
 $O=3$

Discontinuous Galerkin (III)

Vorteile

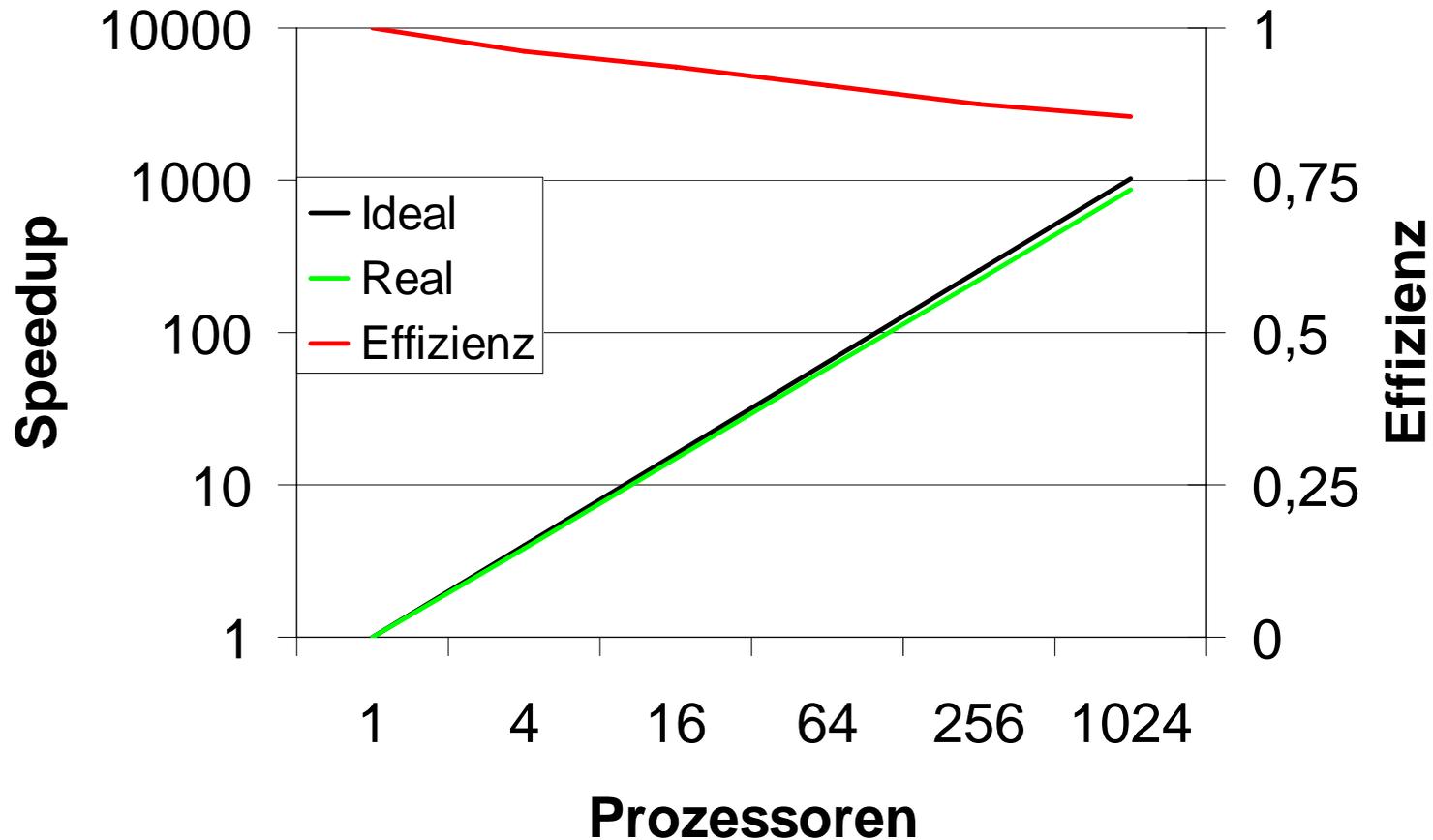
- umfangreiche mathematische Theorie
- hohe Ordnung auch auf unstrukturierten Gittern
- hohe Lokalität, dadurch
 - sehr gute Parallelisierbarkeit und
 - effiziente (skalare) Implementierung

Nachteile

- Problematische Behandlung höherer Ableitungen (Navier-Stokes, Turbulenzmodelle)

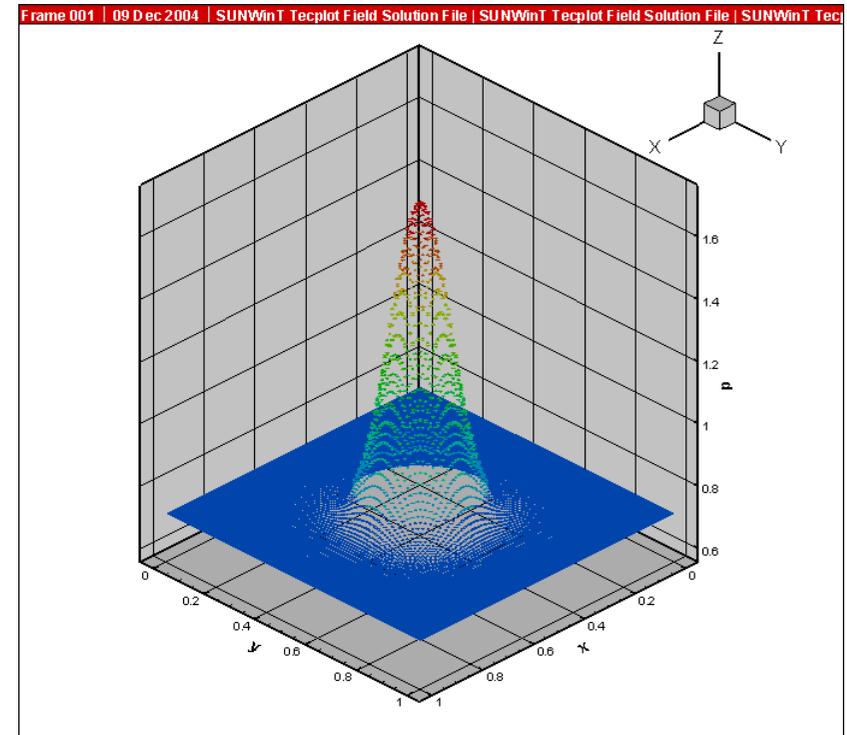
Parallelisierung

Discontinuous Galerkin Code



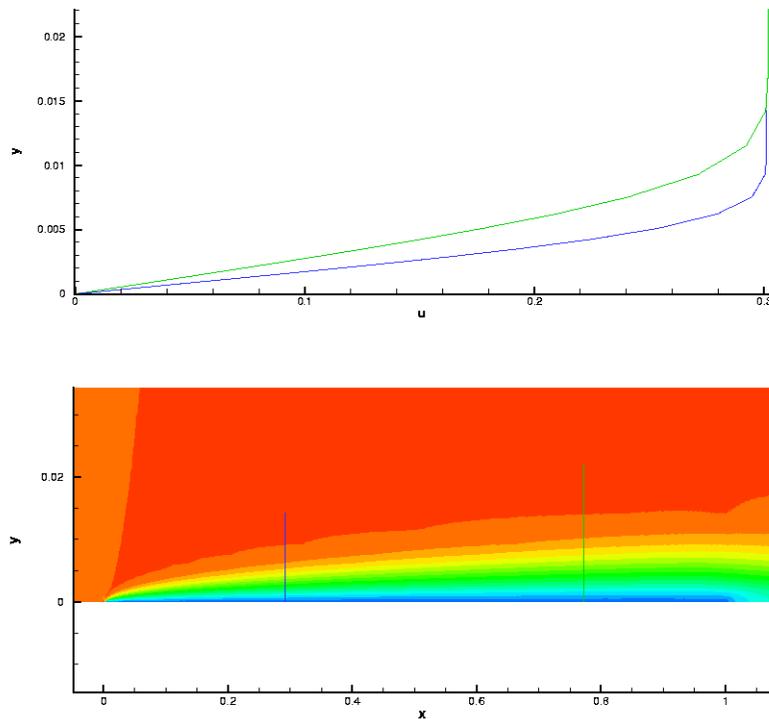
Gaußpuls

- gute Transporteigenschaften
- kaum Randreflexionen

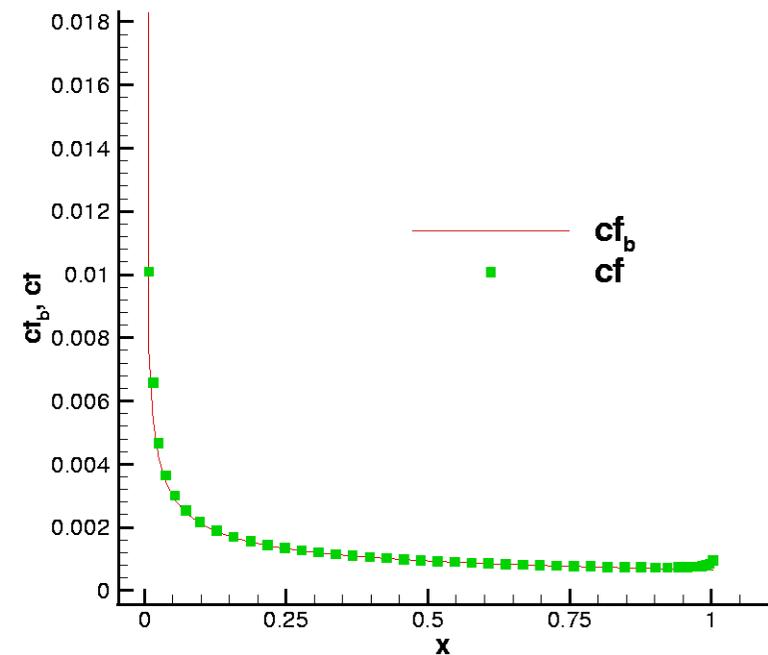


Grenzschicht - laminar

Geschwindigkeitsverteilung



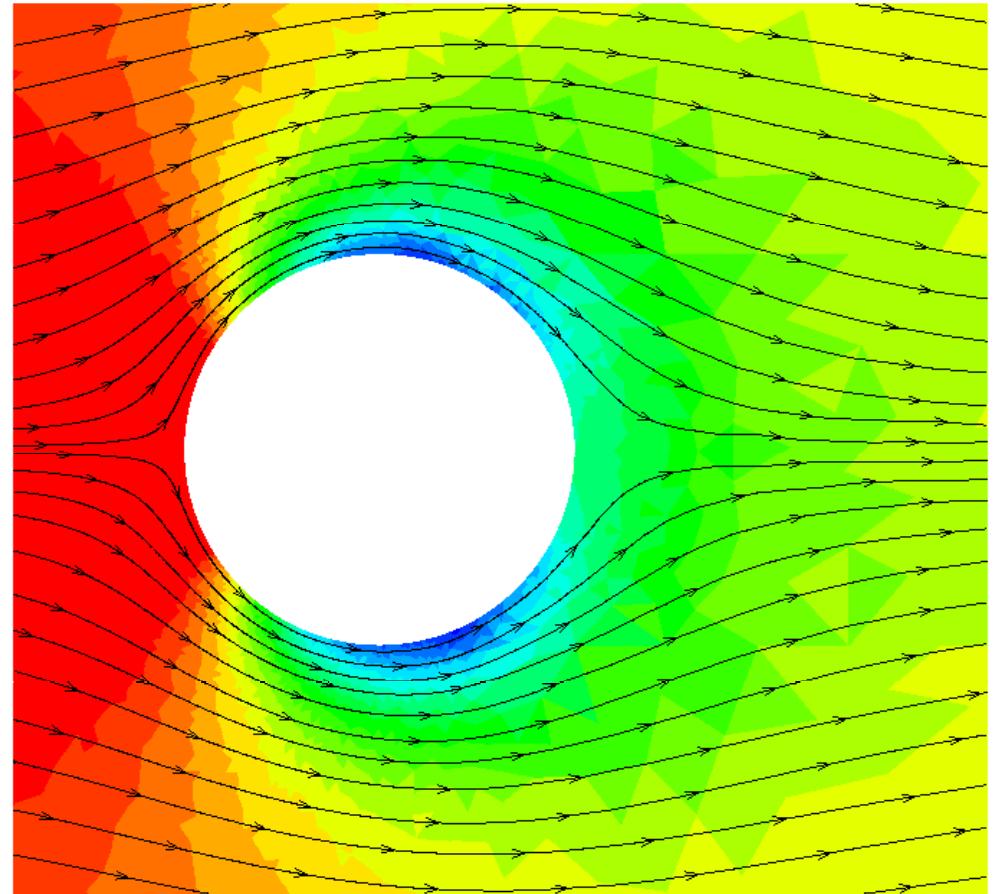
Reibungsbeiwert



2-D Kreiszyylinder

Anfahrwirbel

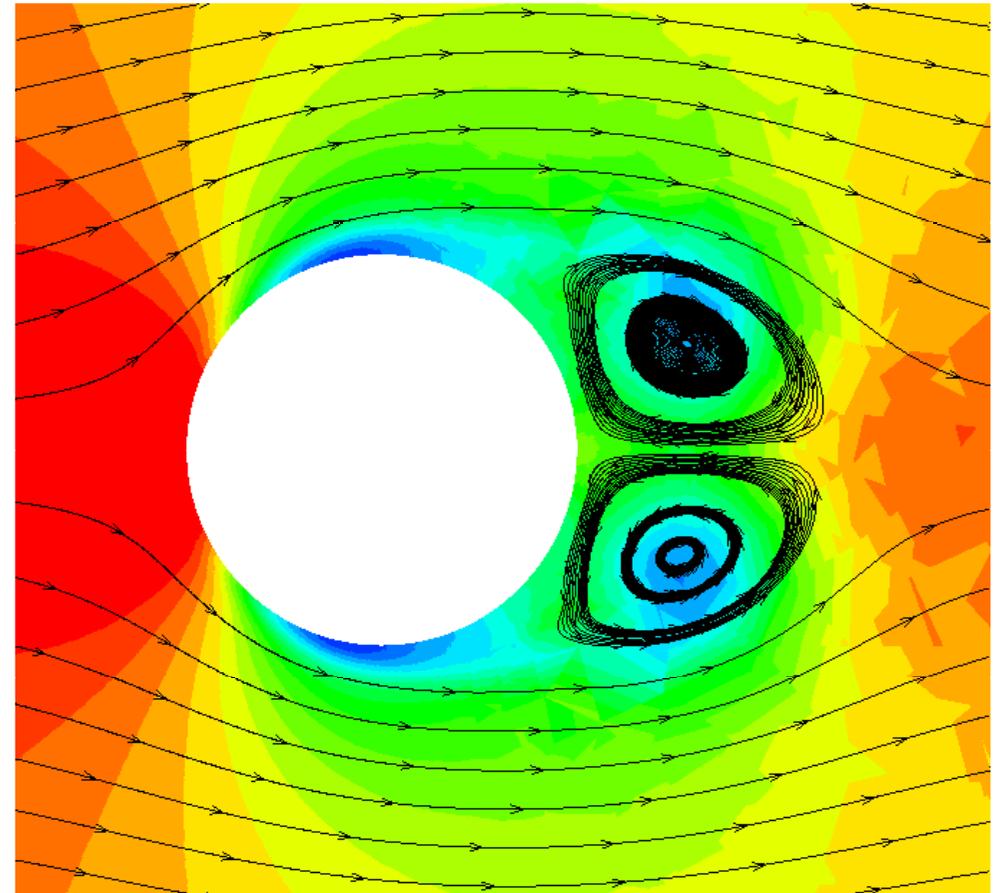
- 1. Ordnung



2-D Kreiszyylinder

Anfahrwirbel

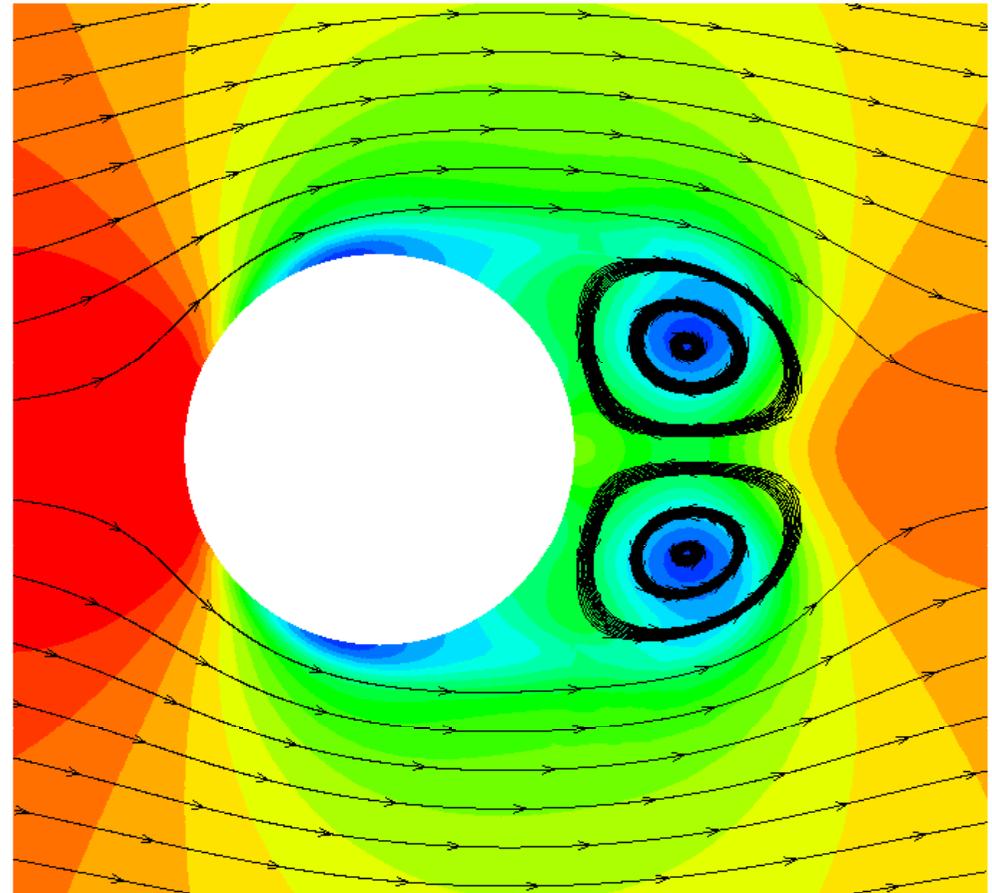
- 2. Ordnung



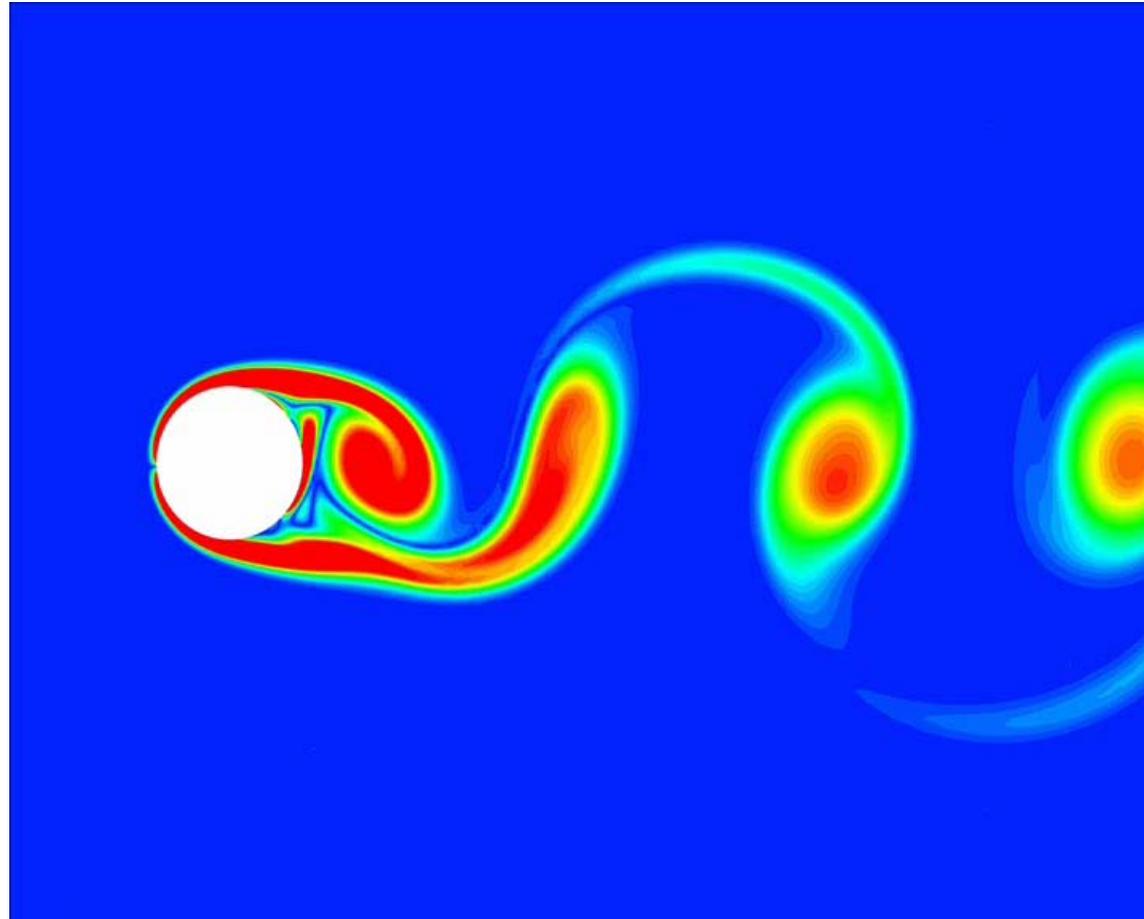
2-D Kreiszyylinder

Anfahrwirbel

- 4. Ordnung

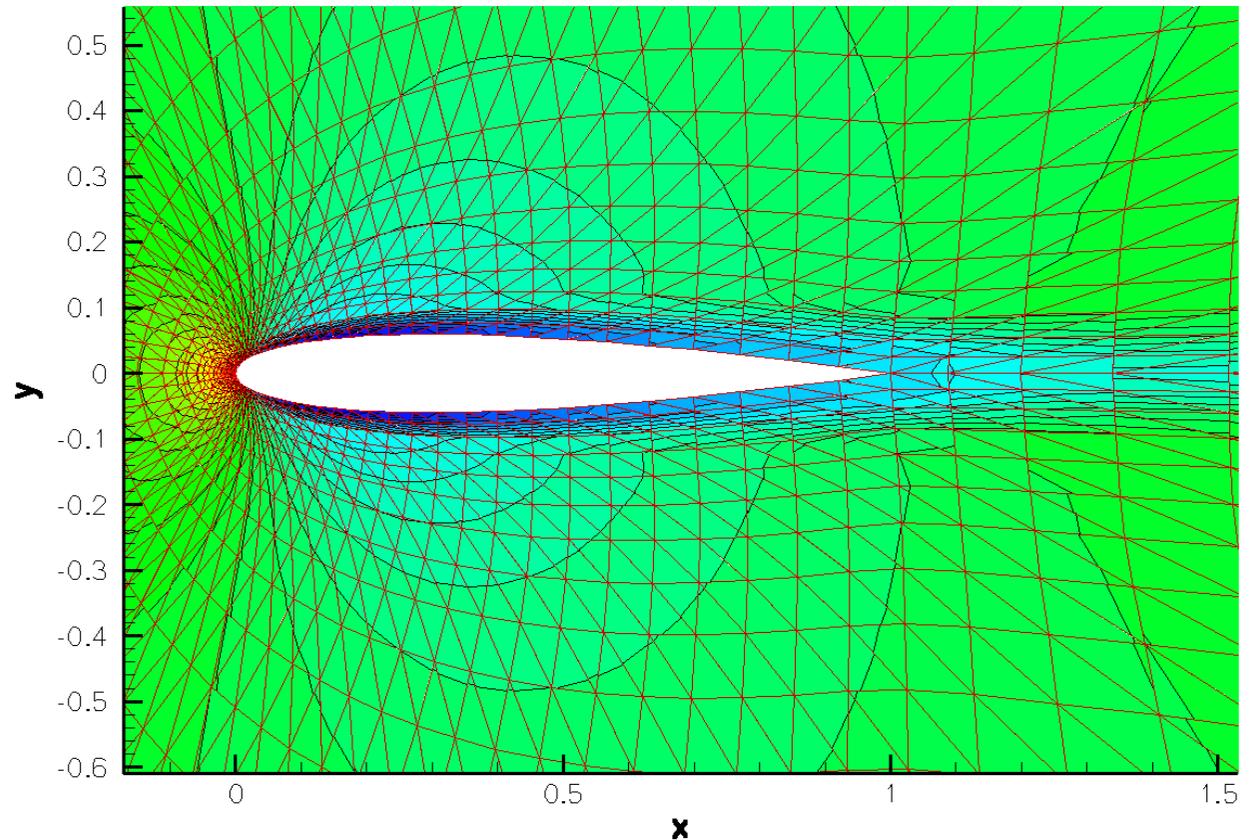


Wirbelstraße



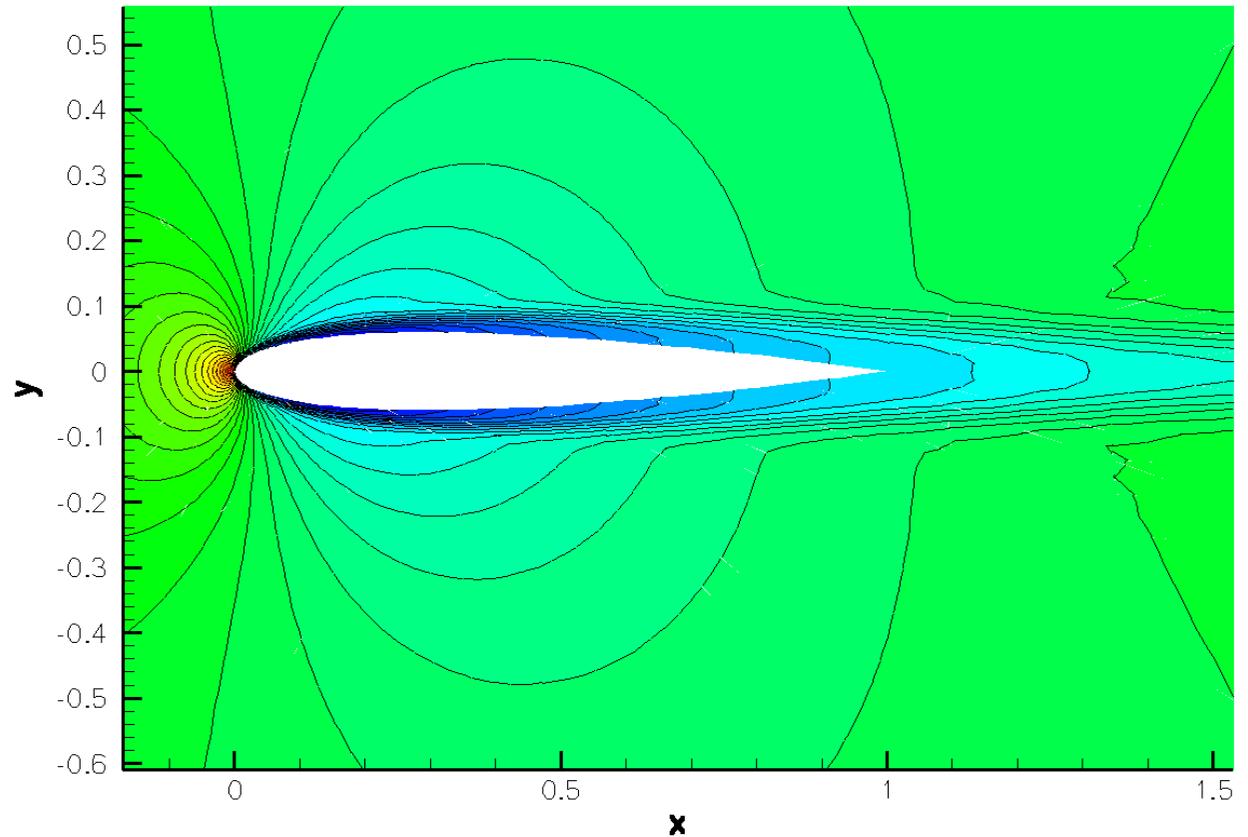
NACA 0012

- $Re=5000$
- $Ma=0.3$
- $\alpha=0^\circ$
- 2. Ordnung



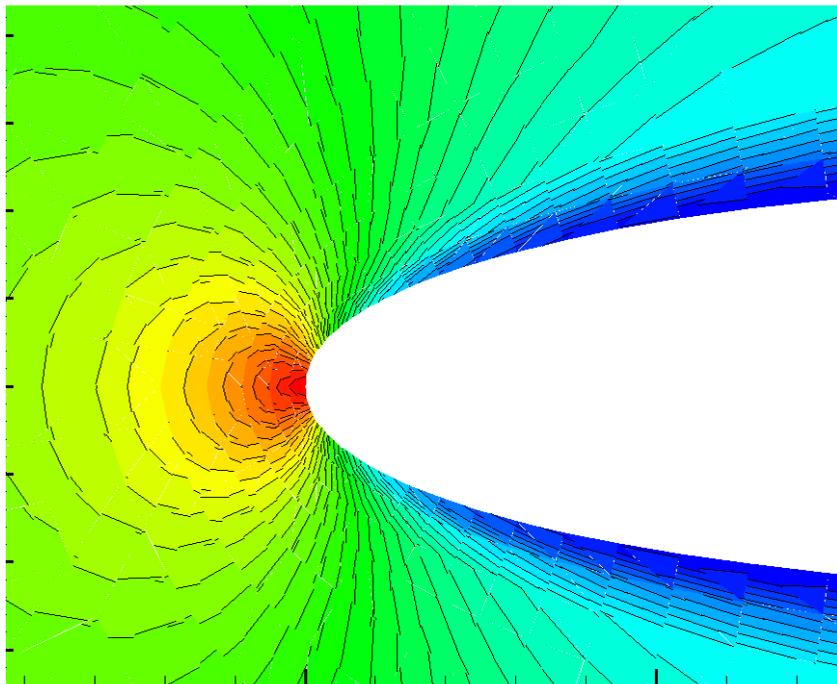
NACA 0012

- $Re=5000$
- $Ma=0.3$
- $\alpha=0^\circ$
- 3. Ordnung

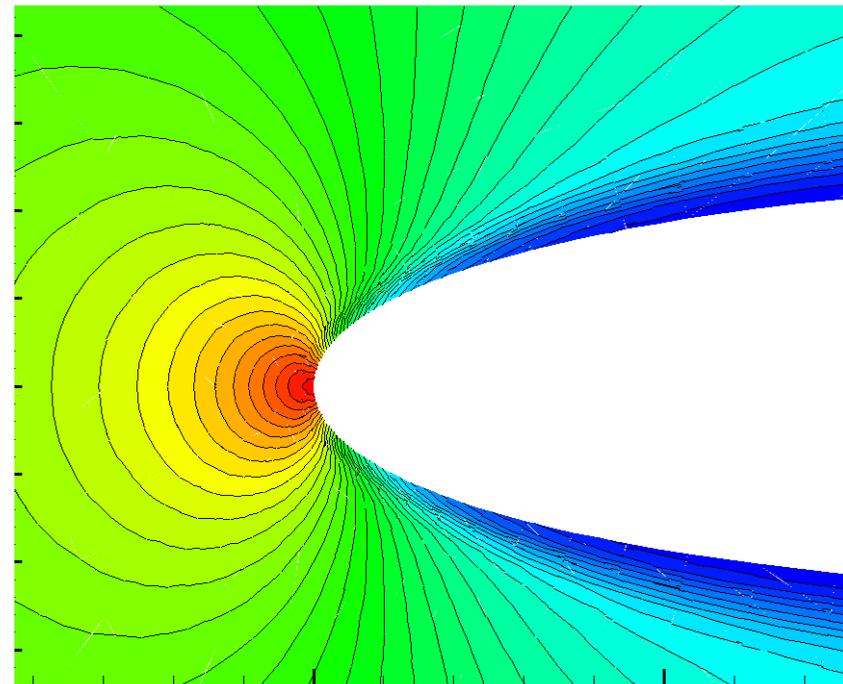


NACA 0012

2. Ordnung

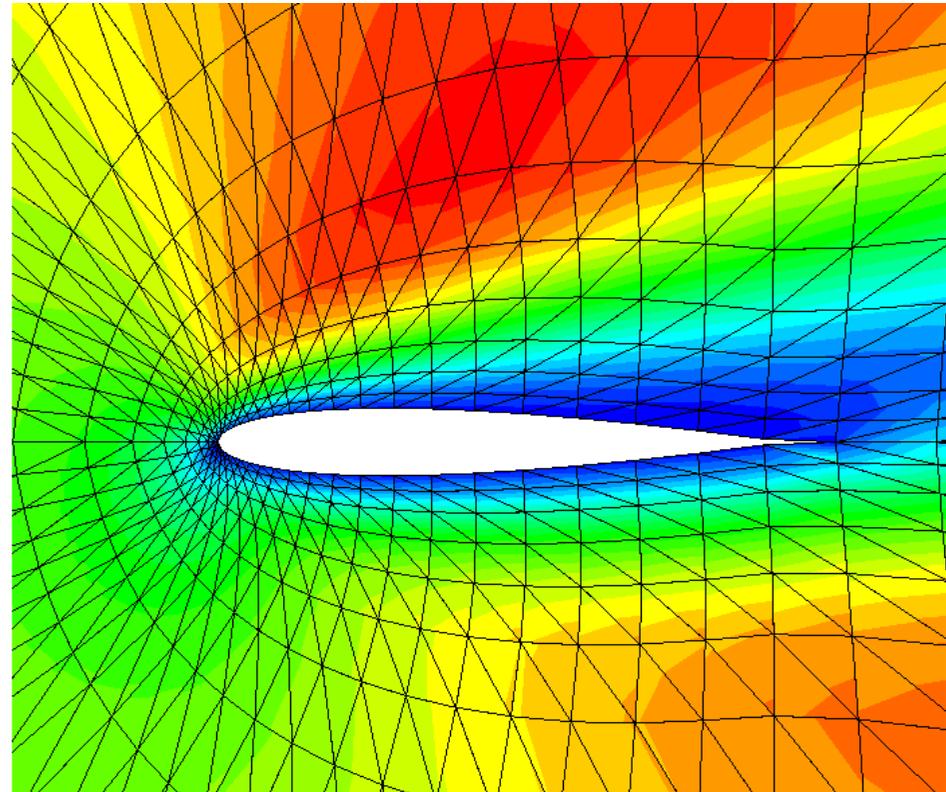


3. Ordnung



NACA 0012

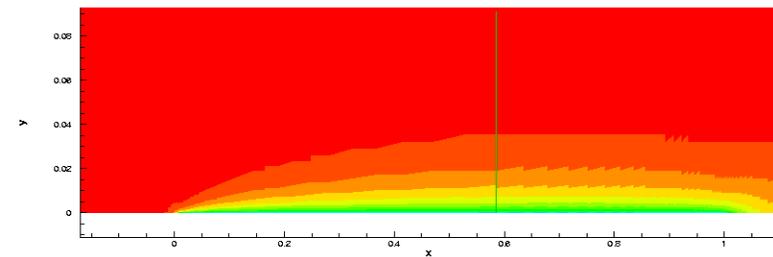
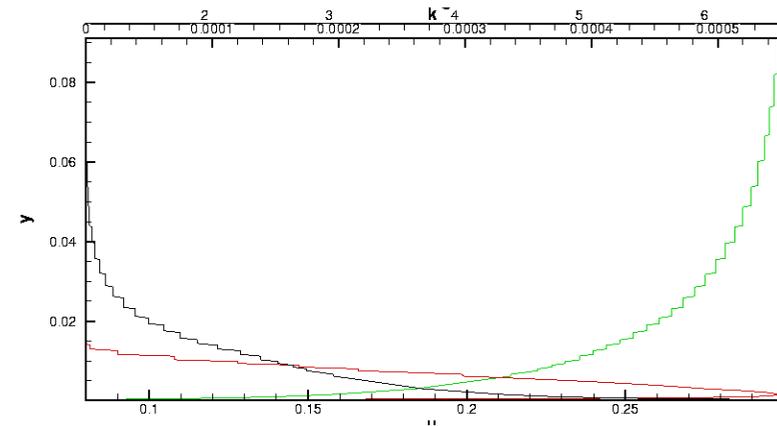
- $Re=73$
- $Ma=0.8$
- $\alpha=10^\circ$



Grenzschicht - turbulent

Geschwindigkeitsverteilung

Turbulenzgrößen



Aerospatiale-A Profil

Testfall im ECARP Projekt

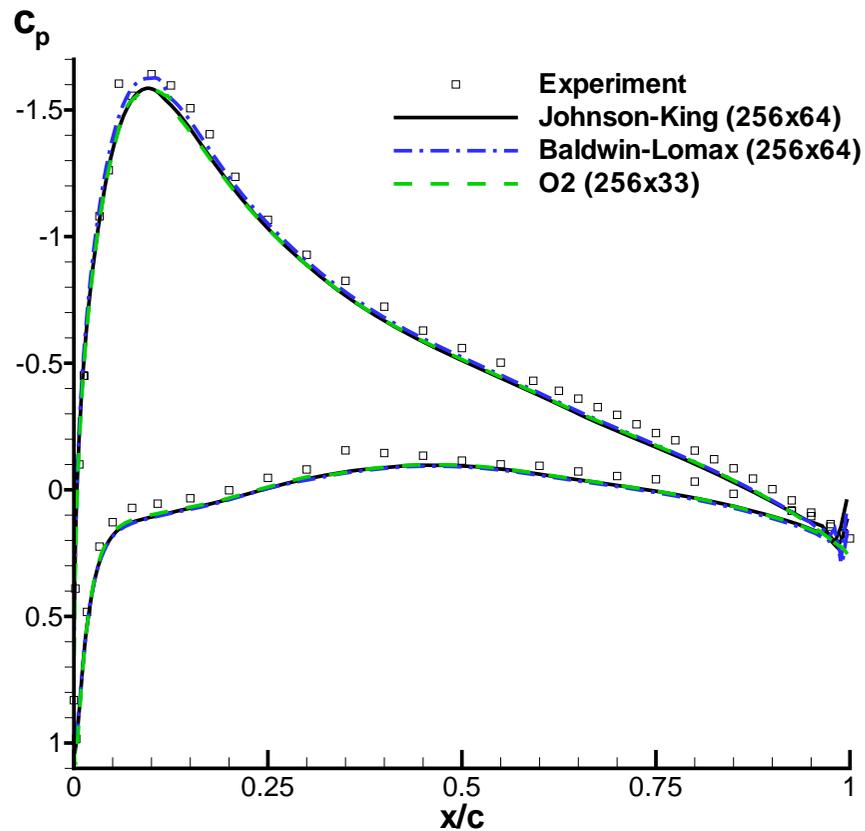
- $Ma=0.15$
- $Re=3.13e6$
- $\alpha=3.4$ deg.
- Transition Saugseite: 12%
- Transition Druckseite: 30%
- Vorgeschriebenes strukturiertes Gitter: 256x64 C-Topologie

Numerische Parameter der O(2)-Simulation

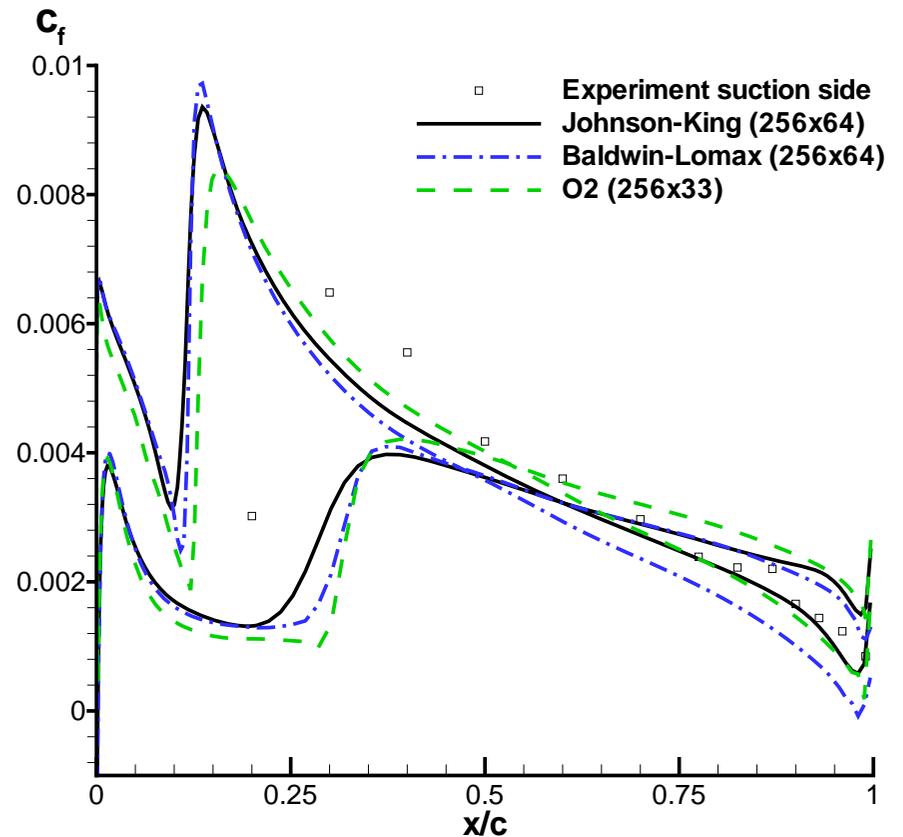
- in gerade Dreiecke zerlegtes 256x33 C-Gitter
- Spalart-Allmaras Turbulenzmodell

Aerospatiale-A Profil

Druckverteilung



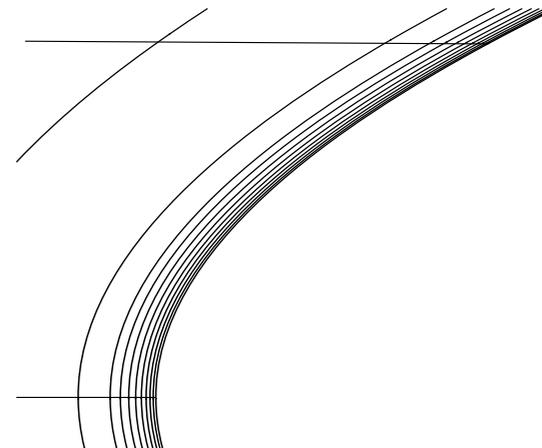
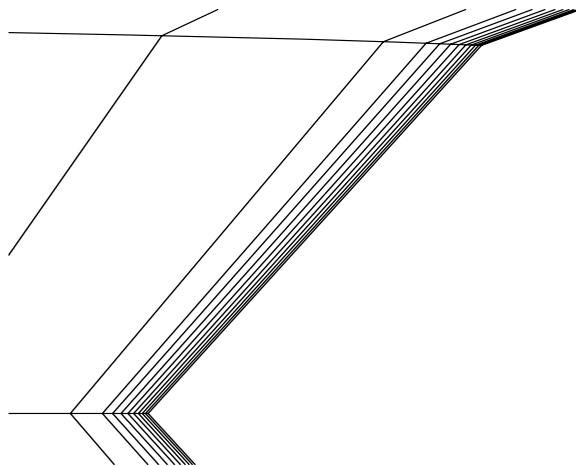
Reibungsbeiwert



Simulationen hoher Ordnung

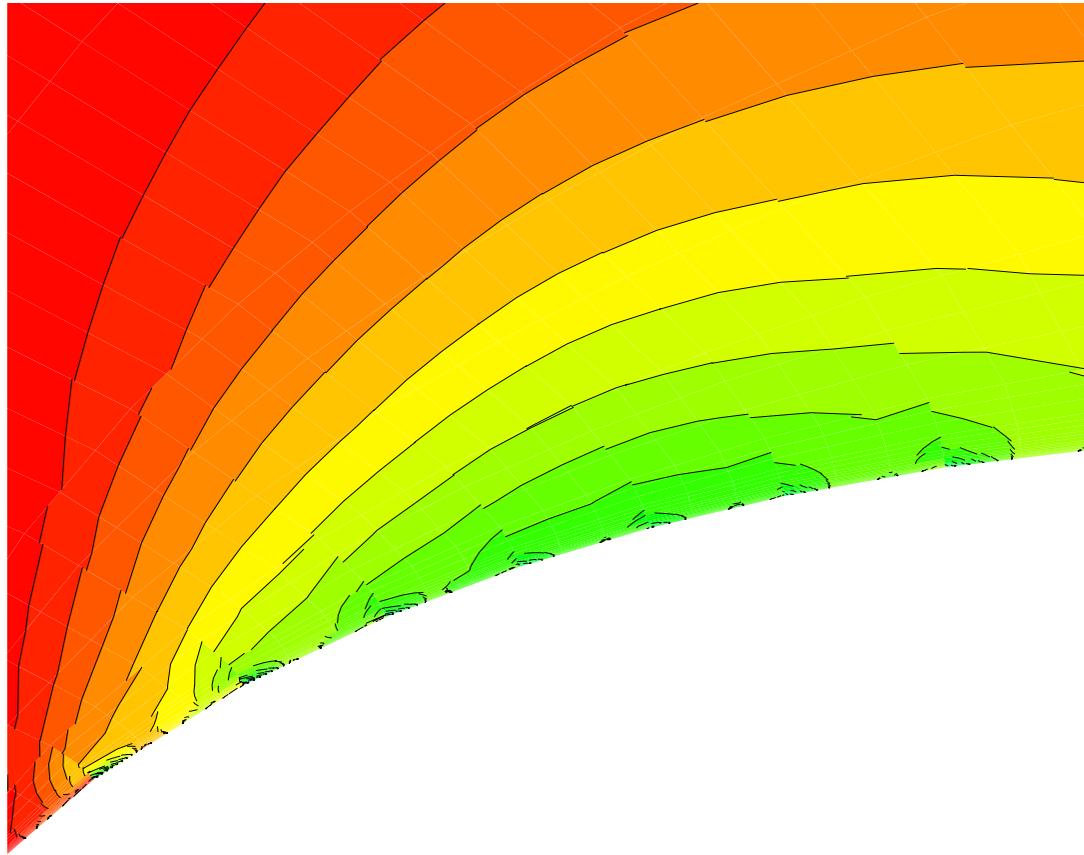
Numerische Parameter

- Vierfach vergrößertes Gitter: 64x16 C-Gitter
- Gebogene Grenzschichtgitterzellen
 - Maximal 12 Layer dick am Staupunkt Nase



Aerospatiale-A Profil

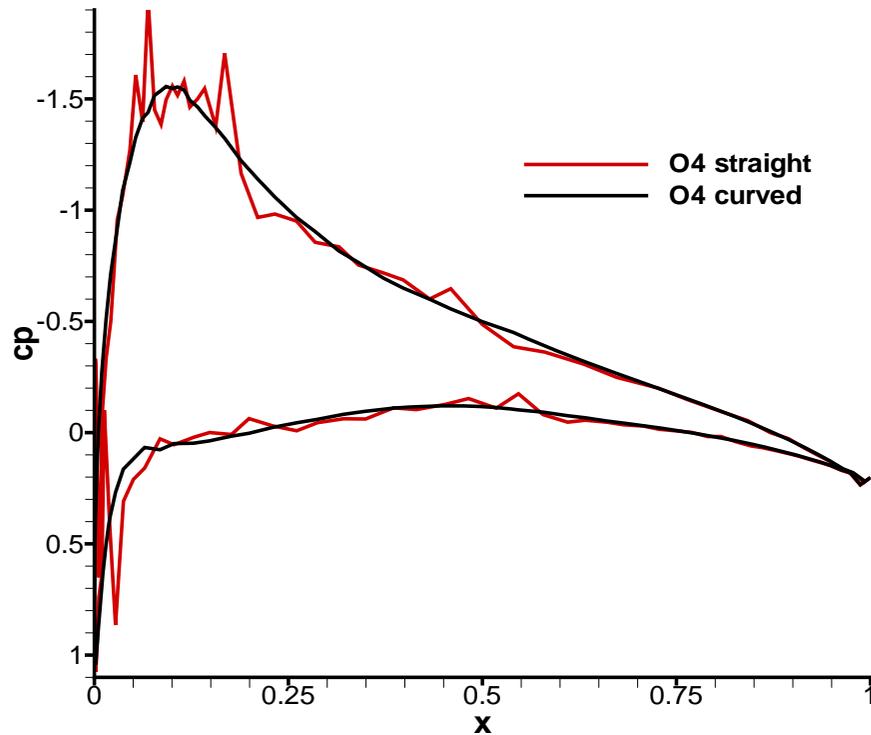
Druckverteilung bei geraden Grenzschichtzellen, $O(4)$



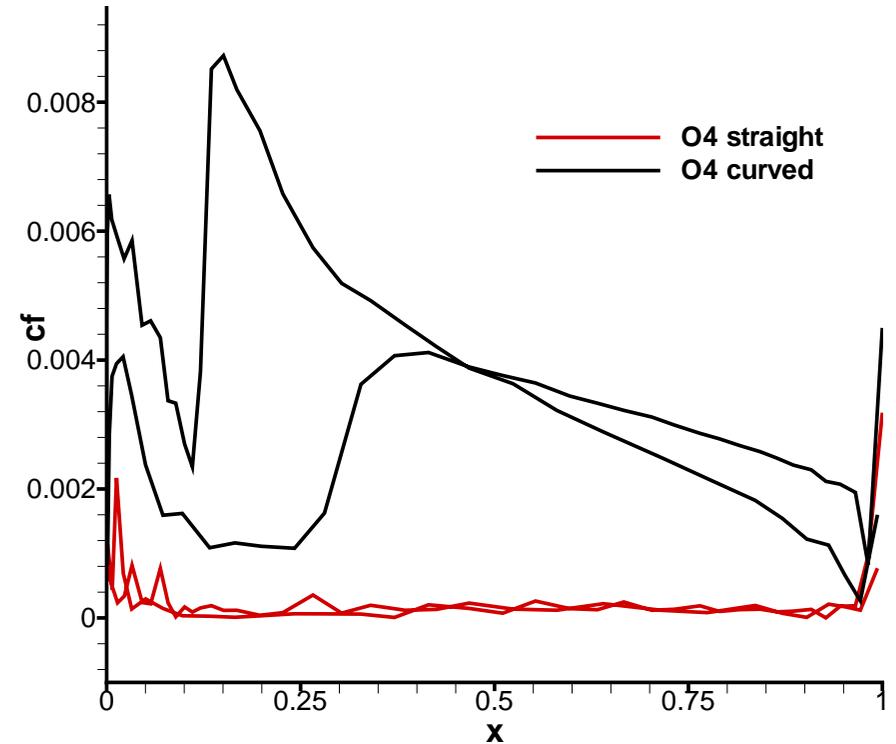
Aerospatiale-A Profil

Vergleich gerade/gebogene Grenzschichtzellen

Druckverteilung

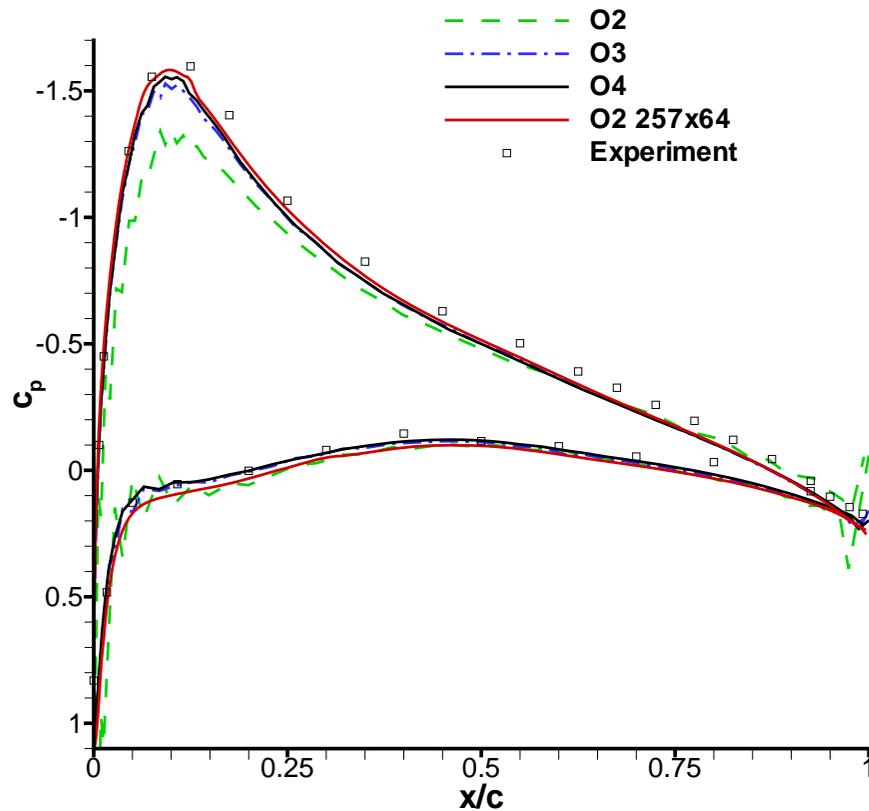


Reibungsbeiwert

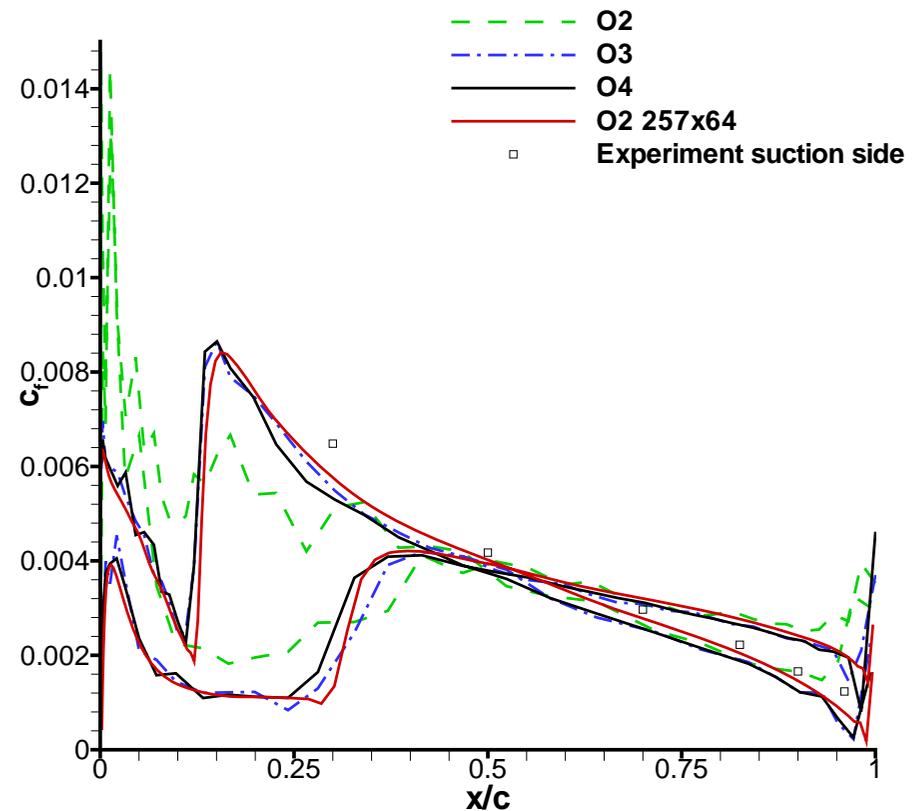


Aerospatiale-A Profil

Druckverteilung



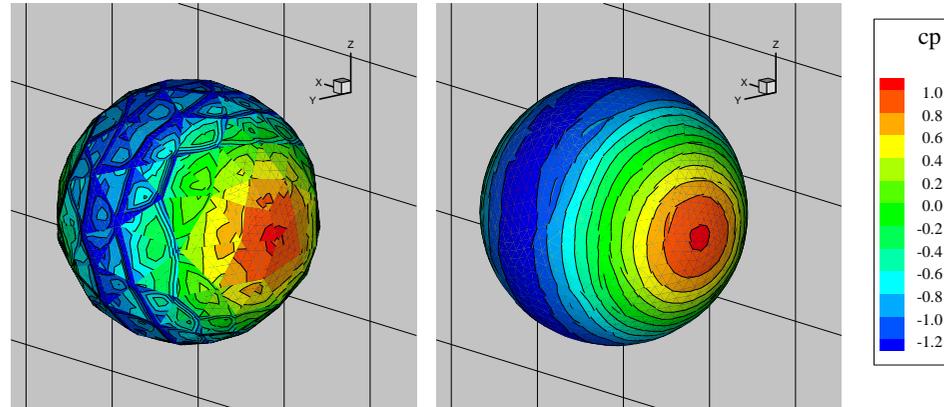
Reibungsbeiwert



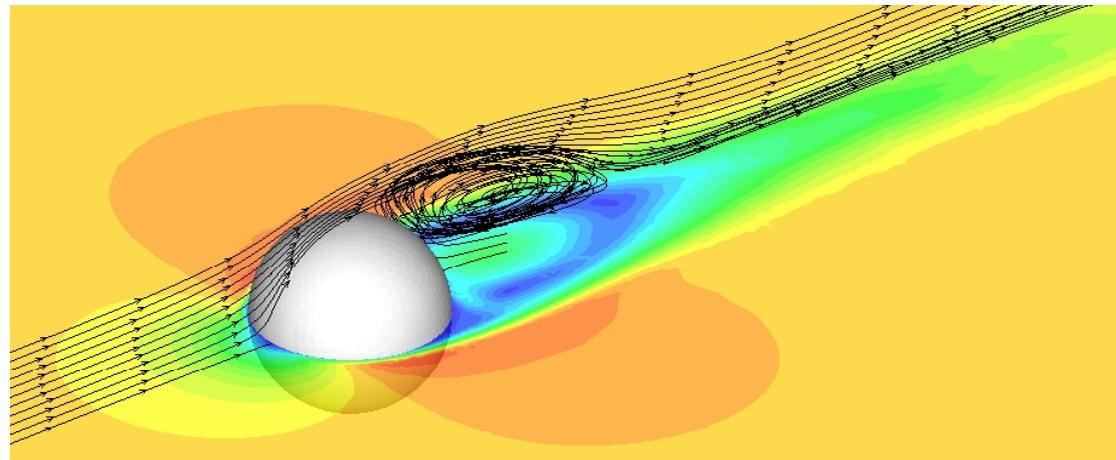
Kugelumströmung 3D

$Re=150$

Gerade/gebogene
Oberflächenelemente

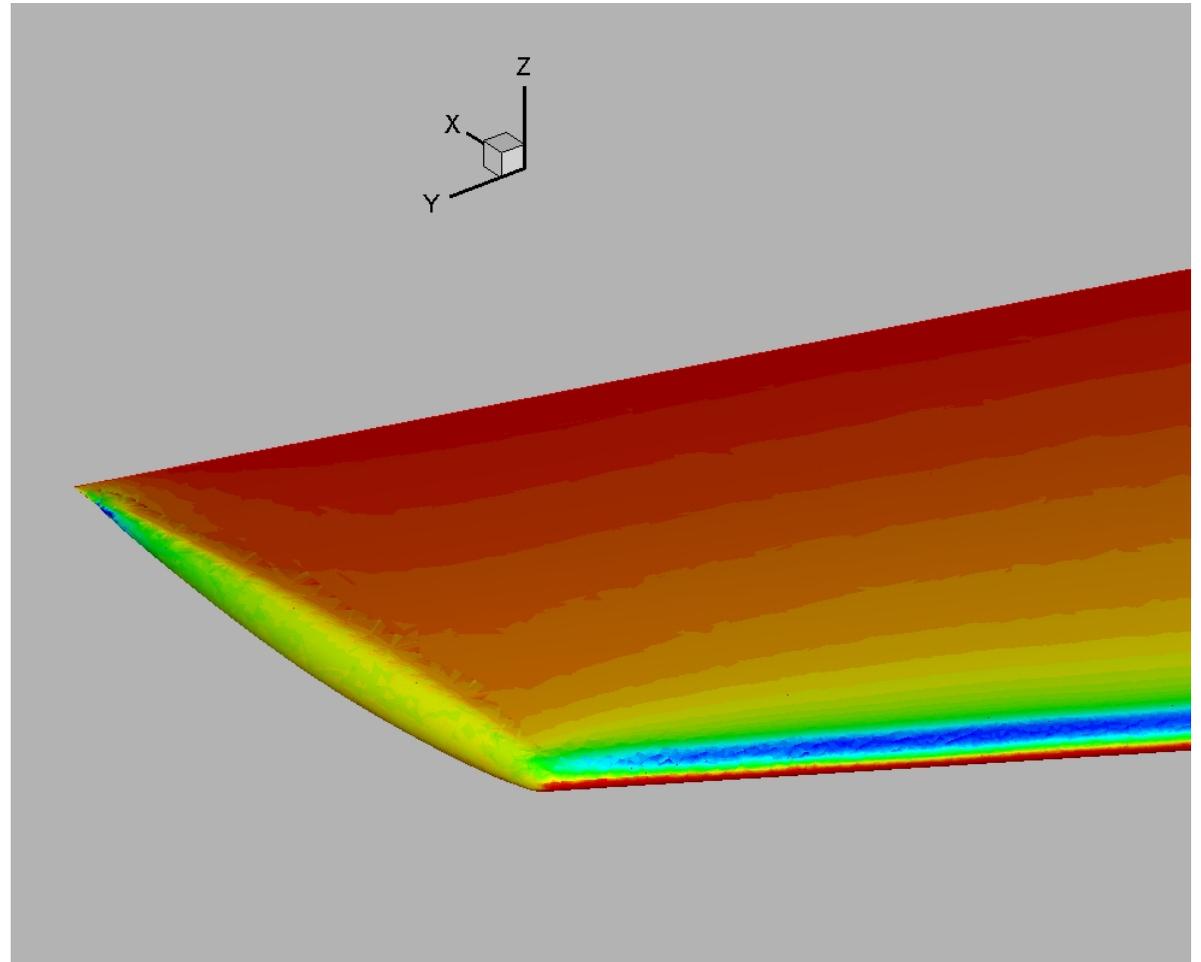
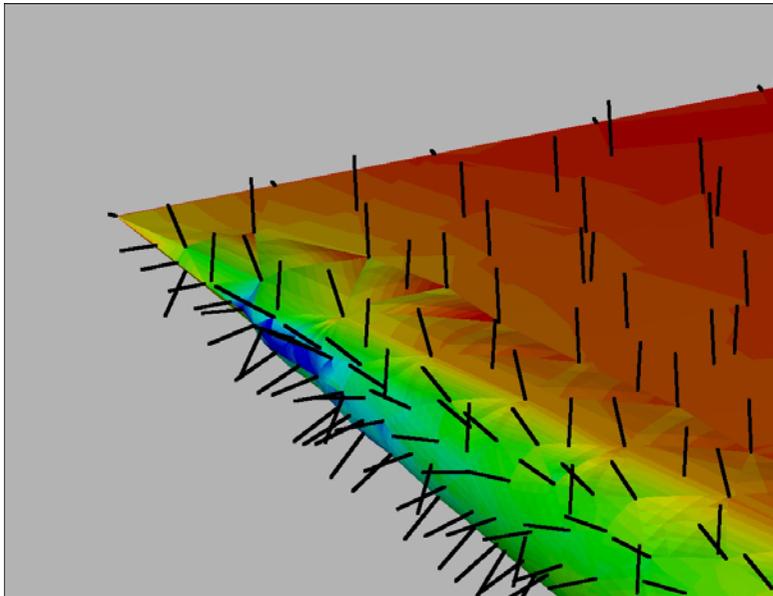


Ablösung mit
Rezirkulationsgebiet



ONERA M6

Oberfläche mit gebogenen
Tetraedern



Zusammenfassung

- DG ist grundsätzlich geeignet für Strömungsrechnung, auch reibungsbehaftet, auch turbulent
- Hohe Ordnung, unstrukturiert, ist realisierbar, aber
 - Kompromiss Rechenaufwand \Leftrightarrow Genauigkeit
 - Wiedergabe der Geometrie mit hoher Ordnung (gebogene Zellen)
- Ausgezeichnete Parallelisierungsperspektive (Cluster)
 - relativ wenig Datenverkehr
 - Latenz versteckbar

aber

- Knackpunkt sind und bleiben höhere Ableitungen
- Performancevergleich zu Finite Volumen noch offen

Ausblick

- Entwicklung der Rechnerhardware forciert ganz allgemein höherwertige Verfahren
- Zunehmende Genauigkeitsanforderungen bevorzugen höhere Ordnungen
- Tuning von DG wird Break-Even im Vergleich zu Finite Volumen 2. Ordnung im Laufe der Zeit nach unten verschieben

Fazit

Discontinuous Galerkin wird sein Anwendungsfeld finden

– oder notfalls neu schaffen 😊