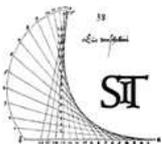


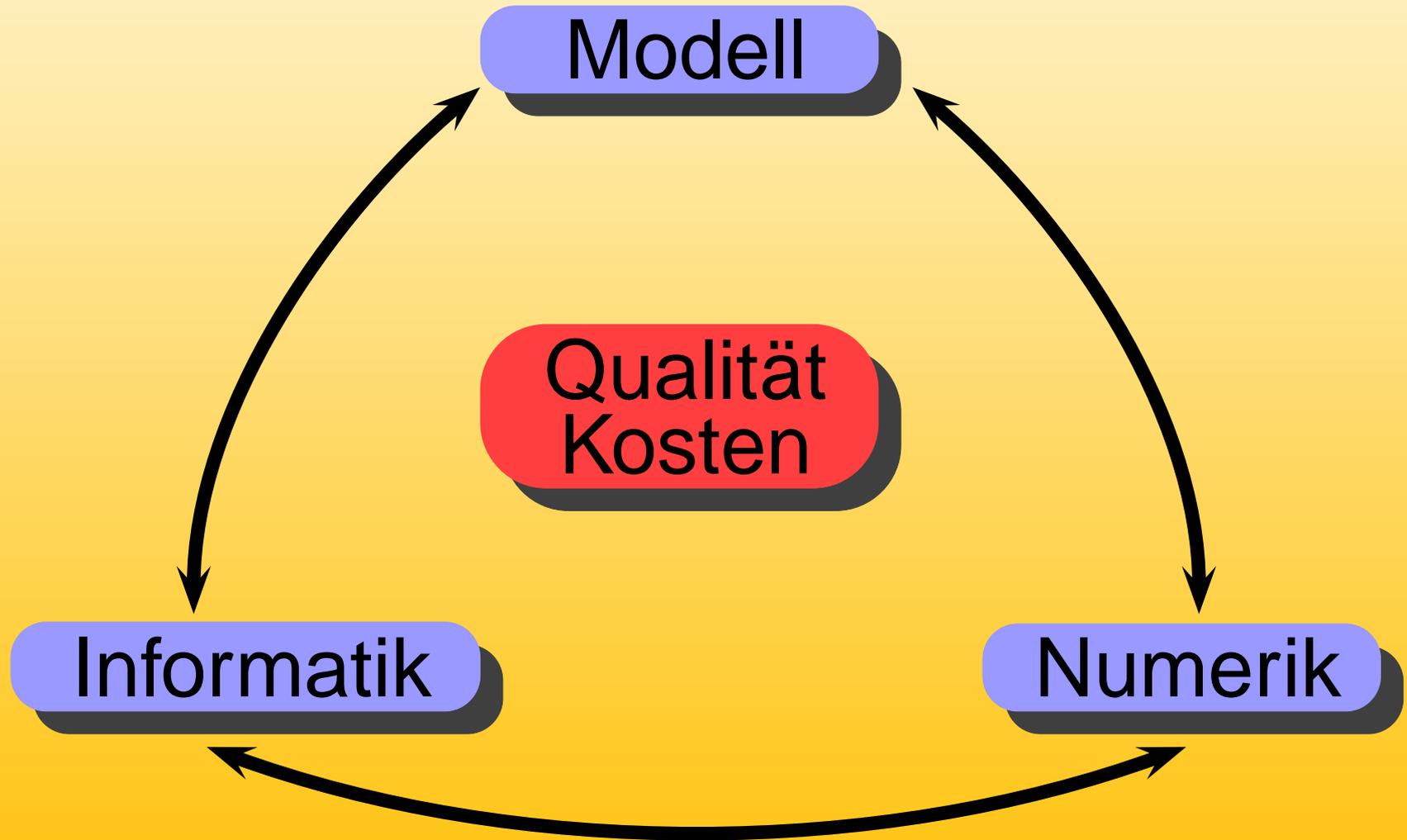
Ein Eingitter-Ansatz für aeroakustische Simulationen bei kleinen Machzahlen

Achim Gordner und Prof. Gabriel Wittum

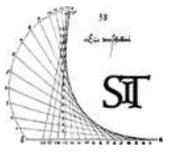
Technische Simulation
Universität Heidelberg



Bestandteile einer numerischen Simulation

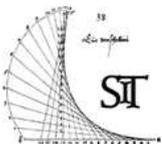


Präamble



Outline

- Motivation
 - Multiskalen-Komplexität
- Eingitter-Ansatz
- Genauigkeit
 - Zeitdiskretisierung
 - Raumdiskretisierung
- Beispiel
- Zusammenfassung



Motivation

Eine direkte aeroakustische Simulation auf Basis der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen führt auf ein **multiskalen** bzw. **multiskalen-gekoppeltes** Problem für $M < 1$

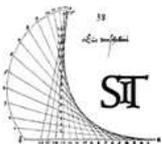
- Wellenlängenverhältnis:

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_a} = \frac{He}{St} = M$$

- Impedanzbeziehung:

$$Z = \frac{p'}{u'} \sim M$$

→ **Mehrskaligenkomplexität ist eine Herausforderung an die Numerik**



Motivation

Eine direkte aeroakustische Simulation auf Basis der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen führt auf ein **multiskalen** bzw. **multiskalen-gekoppeltes** Problem für $M < 1$

- Wellenlängenverhältnis:

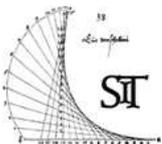
$$\frac{\lambda_v}{\lambda_a} = \frac{He}{St} = M$$

- Impedanzbeziehung:

$$Z = \frac{p'}{u'} \sim M$$

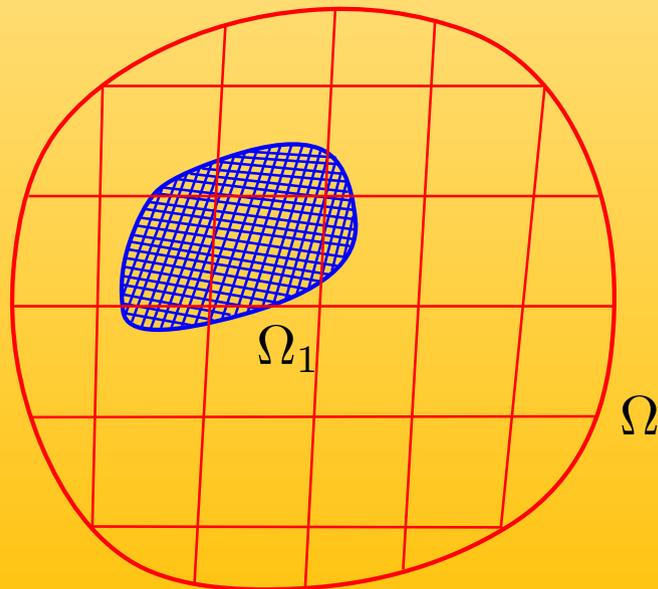
→ **Mehrskaligenkomplexität ist eine Herausforderung an die Numerik**

Reduzierung der Komplexität



Hybride Methoden

- Entkopplung der Strömungssimulation von der akustischen Simulation (CFD-CAA)
- Es existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze
- Verwendung unterschiedlicher Gitter mit unterschiedlichen Gitterweiten für die Akustik(Ω) und Strömungssimulation(Ω_2)



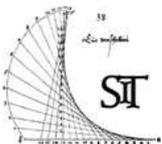
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

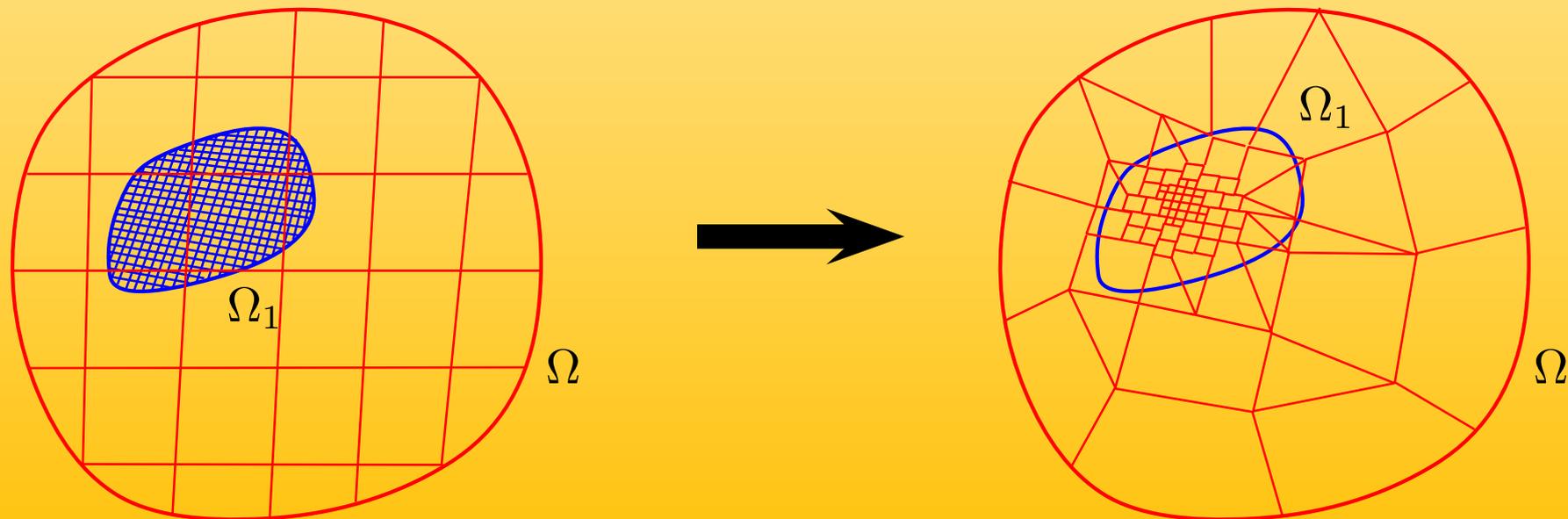
Beispiel

Zusammen-
fassung



Hybride Methoden

- Entkopplung der Strömungssimulation von der akustischen Simulation (CFD-CAA)
- Es existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze
- Verwendung unterschiedlicher Gitter mit unterschiedlichen Gitterweiten für die Akustik(Ω) und Strömungssimulation(Ω_2)



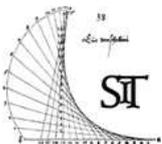
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



Eingitter-Ansatz

Vorteile

- Voll gekoppelte Lösung. (Verbrennung, Strömungsbeeinflussung)
- Optimales Verhältnis zwischen maximaler und minimaler Gitterweite $\frac{h_{min}}{h_{max}} = M$ (h-Adaptivität)

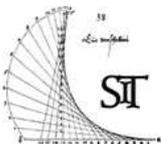
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

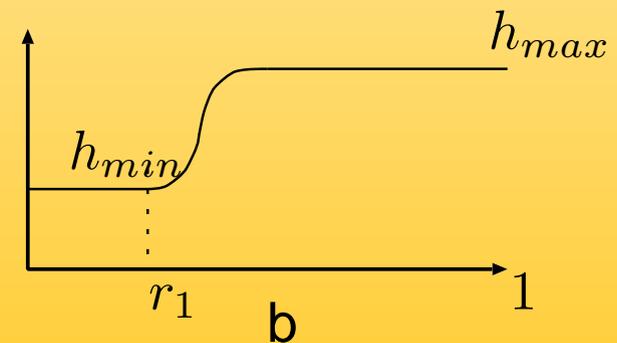
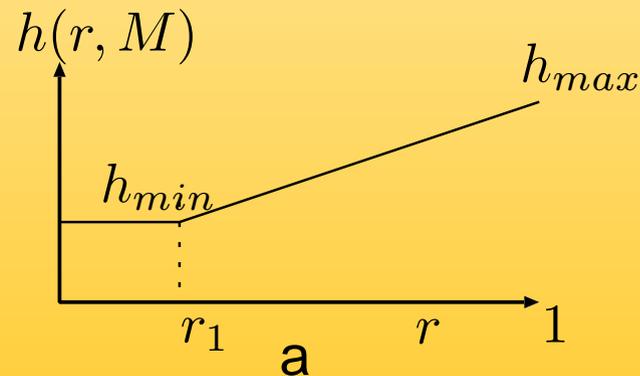
Zusammen-
fassung



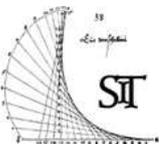
Eingitter-Ansatz

Vorteile

- Voll gekoppelte Lösung. (Verbrennung, Strömungsbeeinflussung)
- Optimales Verhältnis zwischen maximaler und minimaler Gitterweite $\frac{h_{min}}{h_{max}} = M$ (h-Adaptivität)



a)
$$\bar{h} = h_{min} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} - 1 \right) (1 - r_1^2) \right) \sim h_{min} \frac{C}{M}$$



Eingitter-Ansatz

Vorteile

- Voll gekoppelte Lösung. (Verbrennung, Strömungsbeeinflussung)
- Optimales Verhältnis zwischen maximaler und minimaler Gitterweite $\frac{h_{min}}{h_{max}} = M$ (h-Adaptivität)

- Anzahl der Gitterpunkte verglichen mit einem gleichmäßigen Gitter

$$\frac{\#eq}{\#un} \approx \frac{C}{M^d}, \quad d : \text{Dimension des Problems}$$

→ Reduzierung ist Machzahl abhängig

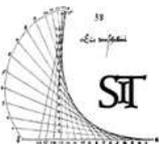
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



Eingitter-Ansatz

Problem in der Zeitdiskretisierung

- CFL-Zahl variiert stark auf dem unstrukturierten Gitter (eine Zeitschrittweite Δt auf dem gesamten Gebiet)

$$CFL = \left[C, \dots, \frac{C}{M} \right], \quad C(\Delta t) \in \mathbb{R}^+$$

- Gleichmäßige numerische Fehlerverteilung auf dem Rechengebiet ergibt sich

$$C(\Delta t) \approx 1$$

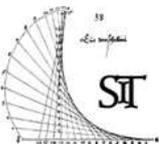
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



Eingitter-Ansatz

Problem in der Zeitdiskretisierung

- CFL-Zahl variiert stark auf dem unstrukturierten Gitter (eine Zeitschrittweite Δt auf dem gesamten Gebiet)

$$CFL = \left[C, \dots, \frac{C}{M} \right], \quad C(\Delta t) \in \mathbb{R}^+$$

- Gleichmäßige numerische Fehlerverteilung auf dem Rechengebiet ergibt sich

$$C(\Delta t) \approx 1$$

Dual/artificial Zeitschritt-Verfahren

or

Implizite Zeitdiskretisierung mit gleicher Zeitschrittweite auf dem gesamten Gebiet Ω

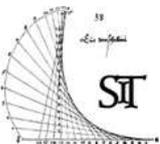
Motivation

Eingitter-Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammenfassung



Implizite Zeitdiskretisierung

- Voll-implizit (auch Konvektion)
- Diagonal dominantes Runge-Kutta Verfahren (2.Ordnung, A-stabil) [Müller-Urbaniak 93]

0	0	0	0	0	
α	$1 - 3\alpha$	$4\alpha - 1$	0	0	
$1 - \alpha$	$1 - 3\alpha$	$1 - 2\alpha$	$4\alpha - 1$	0	, $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
1	$1 - 3\alpha$	$1 - 2\alpha$	α	$4\alpha - 1$	
	$1 - 3\alpha$	$1 - 2\alpha$	α	$4\alpha - 1$	

Butcher-Schema für das Fractional-Step Verfahren

- Nur die letzte Lösung muß gespeichert werden
- Vergleichbare, oder bessere Eigenschaften als ein explizites R-K-Verfahren 4. Ordnung bei gedämpften Wellenlösungen

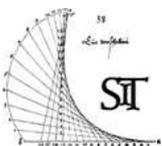
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

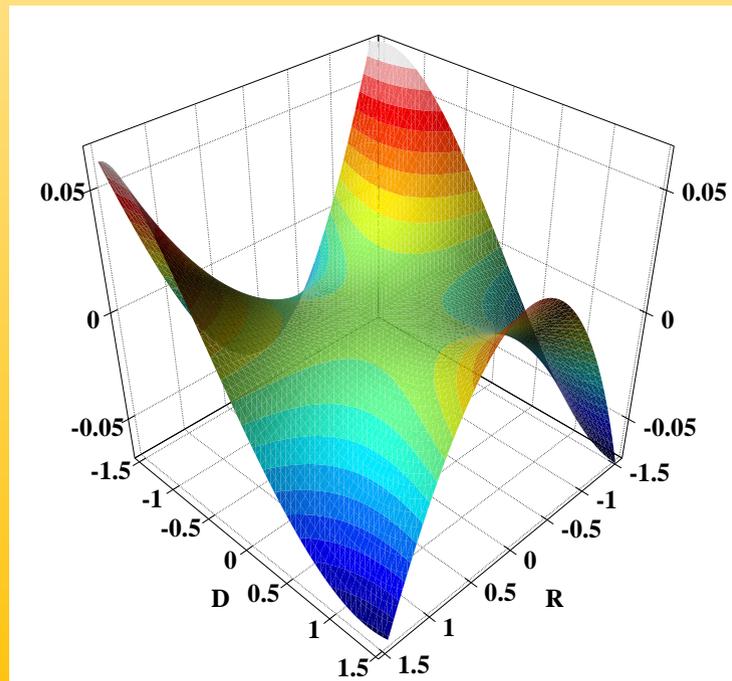
Zusammen-
fassung



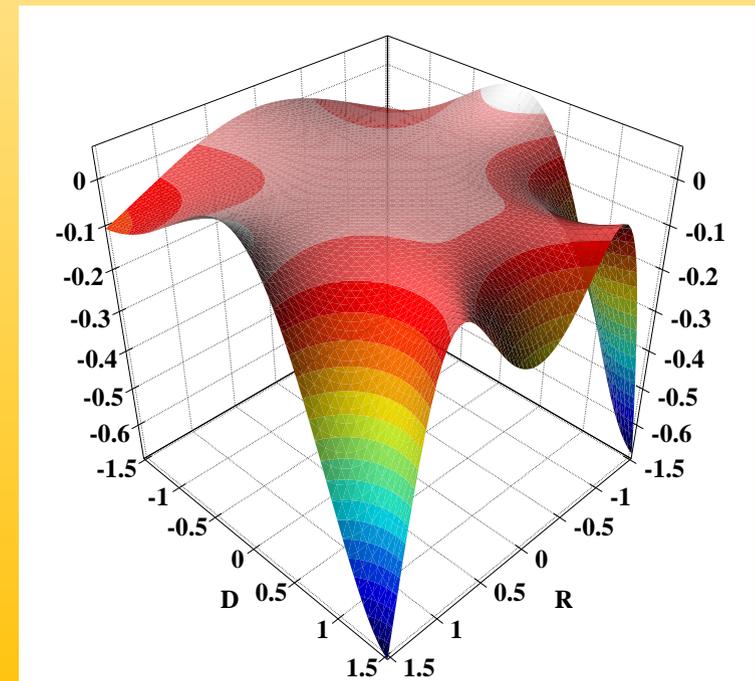
Implizite Zeitdiskretisierung

- ω_P : Physikalische Kreisfrequenz [Tam&Webb 93]
- ω_L : Kreisfrequenz der diskreten Lösung

Numerische Dämpfung $Im(\omega_P) - Im(\omega_L)$, $\omega_P, \omega_L \in \mathbb{C}$



Implizites FRAC-Step



Explizites R-K

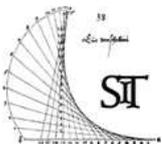
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

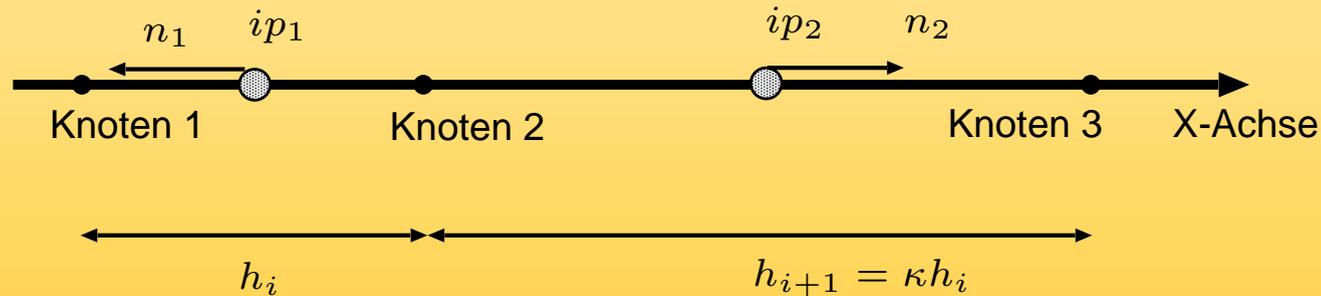
Beispiel

Zusammen-
fassung

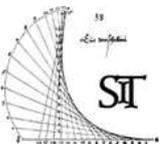


Anforderungen

- Finite-Volumen Methode (2. Ordnung für Akustik).
Genauigkeit auf unstrukturierten Gittern ?

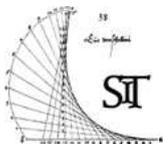
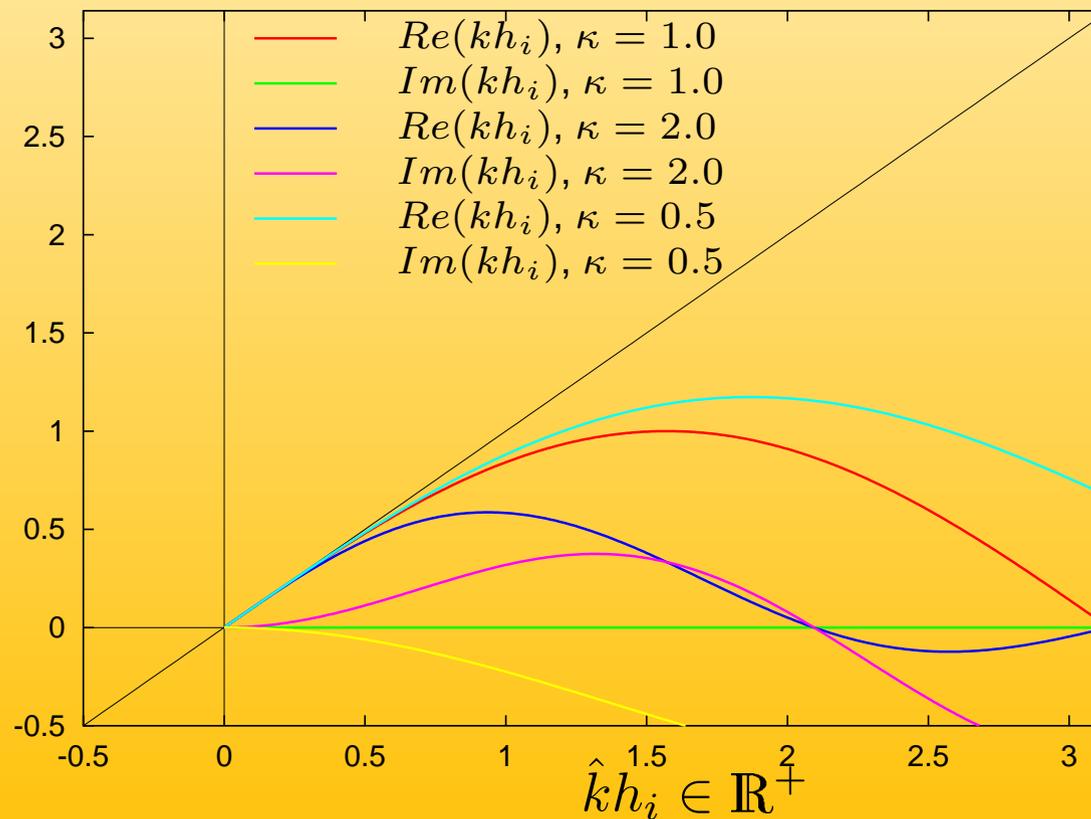


$$\kappa = \frac{h_{i+1}}{h_i}$$



Anforderungen

- Finite-Volumen Methode (2. Ordnung für Akustik).
Genauigkeit auf unstrukturierten Gittern ?



Anforderungen

- Finite-Volumen Methode (2. Ordnung für Akustik). Genauigkeit auf unstrukturierten Gittern ?
- Gleichungssystem $Aq = f(q)$ muß schnell und effizient gelöst werden
 - Angepaßtes Mehrgitterverfahren (Glätter, Gittertransferoperatoren)

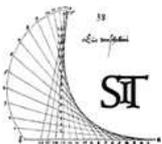
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



Anforderungen

- Finite-Volumen Methode (2. Ordnung für Akustik). Genauigkeit auf unstrukturierten Gittern ?
- Gleichungssystem $Aq = f(q)$ muß schnell und effizient gelöst werden
 - Angepaßtes Mehrgitterverfahren (Glätter, Gittertransferoperatoren)
- Finite-Volumen Verfahren höherer Ordnung sind sehr komplex und aufwendig
 - τ -Extrapolation [Brandt 77] bei glatten Lösungen. Hintergrund ist die Kombination von Lösungen auf unterschiedlichen Gitterweiten h_i

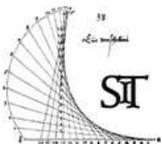
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



τ -Extrapolation [Brandt 77]

- Die Ordnung der Lösung hängt von der RHS $f(q)$ ab
- Erhöhung der Ordnung von $f(q)$ durch Kombination verschiedener RHSs von unterschiedlichen Gittern
 $f_l^*(q) = \sum_l^1 c_l f_l(R_l q)$ (Richardson Extrapolation)

	c_3	c_2	c_1
$l = 2$	-	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$l = 3$	$-\frac{3}{45}$	$-\frac{16}{45}$	$\frac{64}{45}$

- Man erreicht fast eine Verdoppelung der Ordnung mit jedem Gitterlevel
- Idee lässt sich gut in den Mehrgitteralgorithmus einfügen

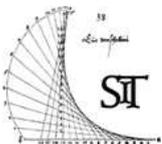
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



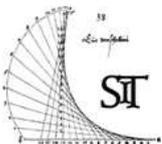
τ -Extrapolation [Brandt 77]

Lineares Mehrgitter
 $LGM(l, u, f)$

- $u_l = S^\nu(u_l, f_l)$ Glättung
- $d_{l-1} = R_l^{l-1}(A_l u_l - f_l)$
Restriktion
- $c_{l-1} = 0$
- $LGM(l-1, c_{l-1}, d_{l-1})$
- $u_l = u_l - R_{l-1}^l c_{l-1}$
- $u_l = S^\nu(u_l, f_l)$ Glättung

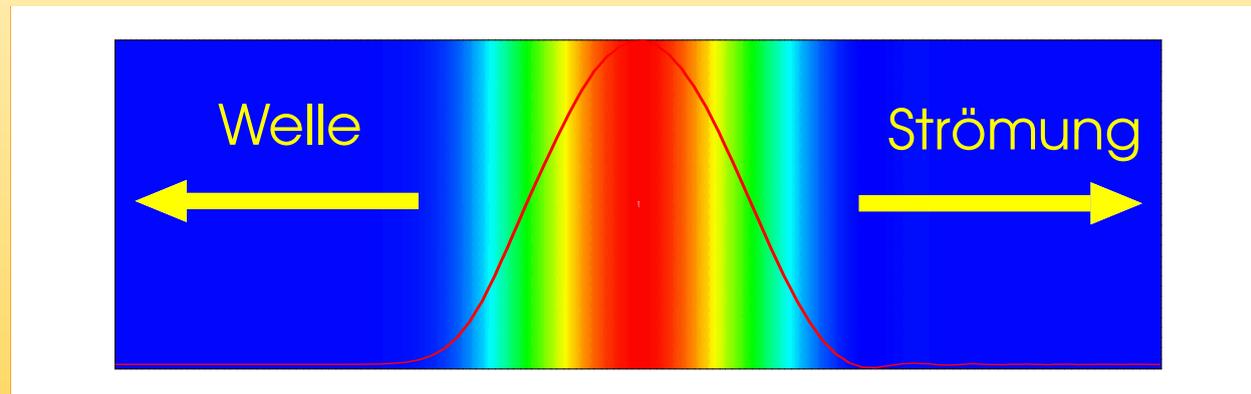
τ -Extrapolation $\tau LGM(l, u, f)$

- $u_l = S^\nu(u_l, f_l)$ Glättung
- $d_{l-1} = f_{l-1}^*$
- $c_{l-1} = 0$
- $LGM(l-1, c_{l-1}, d_{l-1})$
- $u_l = u_l - R_{l-1}^l c_{l-1}$
- $u_l = S^\nu(u_l, f_l - R_{l-1}^l f_{l-1}^* - A_l R_{l-1}^l c_{l-1})$

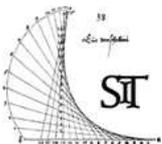


Numerische Tests

Konfiguration eines einfachen linearen akustischen Testfalles

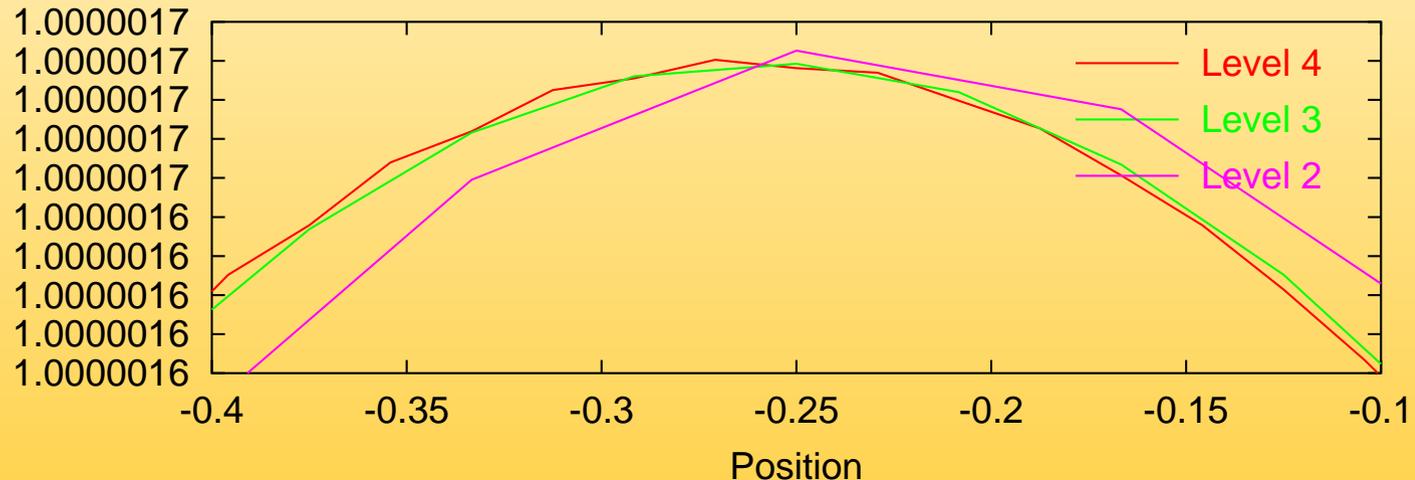


- $M = 10^{-3}$, Amplitude = 10^{-6}
- Zeitschritt: $\omega \Delta t = 0.1$
- Level 4: ≈ 70 Gitterpunkte pro Wellenlänge, $kh_i \approx 0.1$
- Level 3: ≈ 35 Gitterpunkte pro Wellenlänge, $kh_i \approx 0.2$
- Level 2: ≈ 18 Gitterpunkte pro Wellenlänge, $kh_i \approx 0.4$

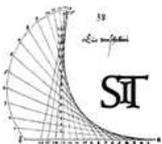


Numerische Tests

Lösungen auf unterschiedlichen Gitterebenen



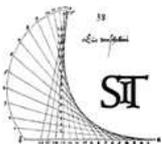
- Unterschiedliche Dispersionsfehler auf den unterschiedlichen Gitterebenen (uniformes Gitter)



Numerische Tests

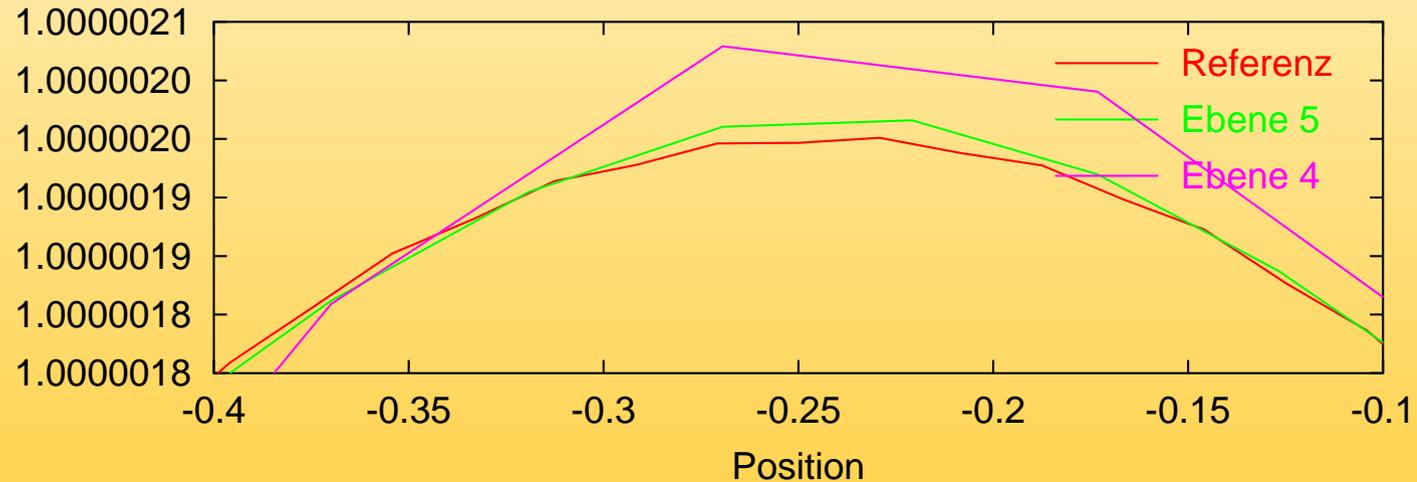
Gitterweite vergrößert sich in Ausbreitungsrichtung der Welle

$$\kappa \approx 2$$

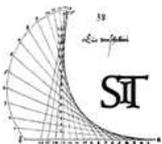


Numerische Tests

Gitterweite vergrößert sich in Ausbreitungsrichtung der Welle

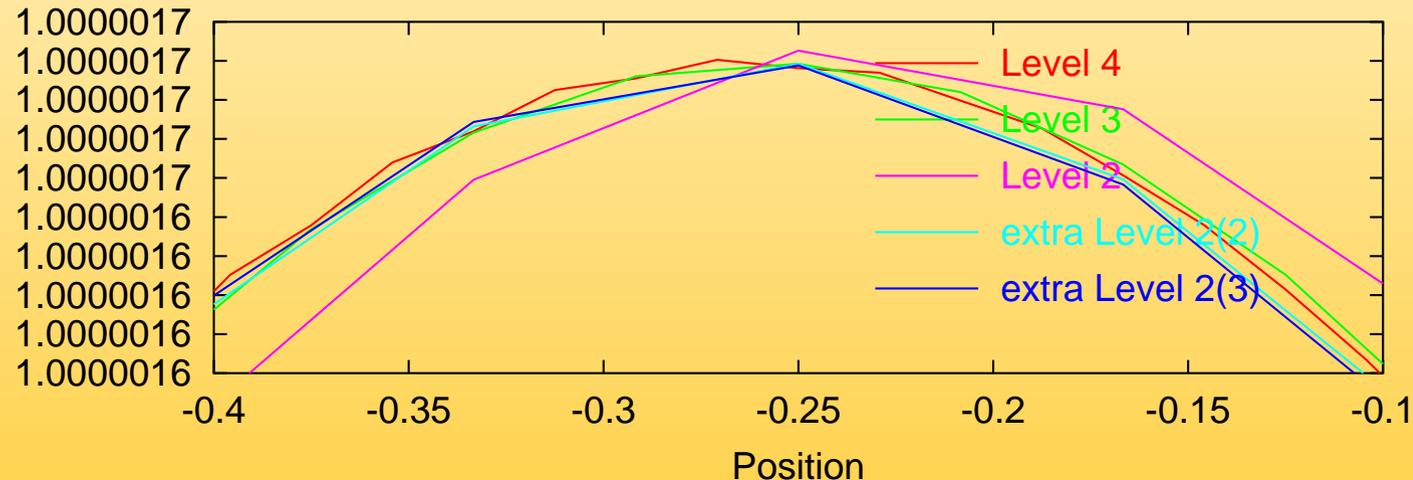


- Wellenamplitude wächst an. Instabilität.

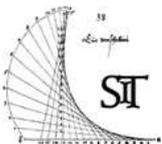


Numerische Tests

Lösungen mit τ -Extrapolation auf uniformen Gittern

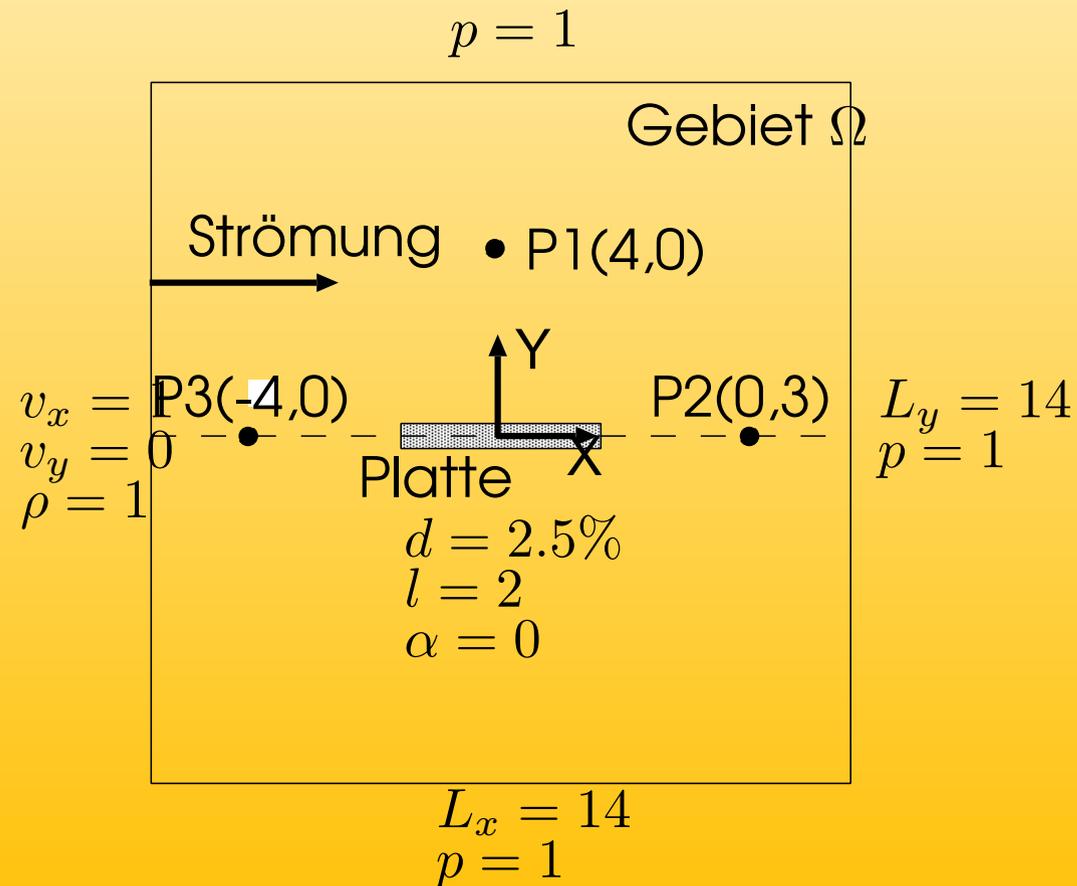


- extra 2(2): Mehrgitter V-Zyklus 2 Vor- und 2 Glättungsschritte. τ -Extrapolation über 2 Gitterebenen
- extra 2(3): Mehrgitter V-Zyklus 2 Vor- und 2 Glättungsschritte. τ -Extrapolation über 3 Gitterebenen



Numerische Simulation

Ebene Plattenströmung mit $d = 2.5\%$ bei $M = 0.2$



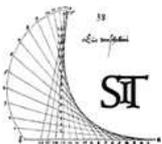
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

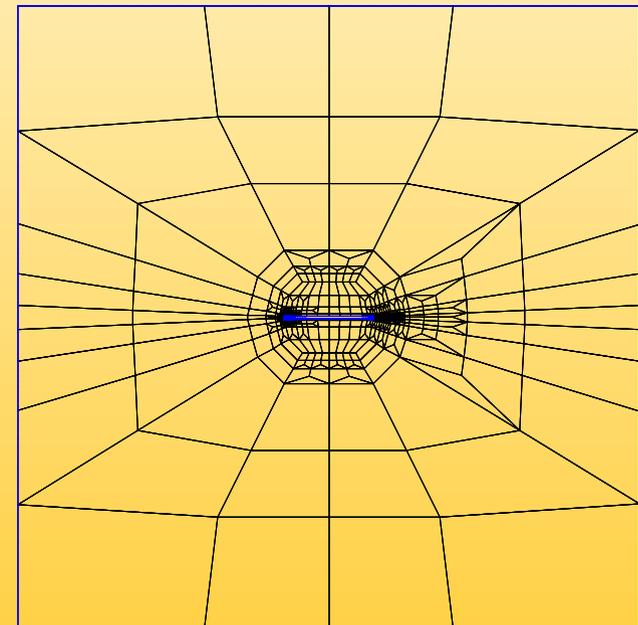
Zusammen-
fassung



Numerische Simulation

Vergleich Gitterpunkte unstrukturiertes Gitter zu uniformen Gitter

$$\text{theo} \approx \frac{C}{M^2}$$



Motivation

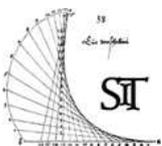
Eingitter-Ansatz

Genauigkeit

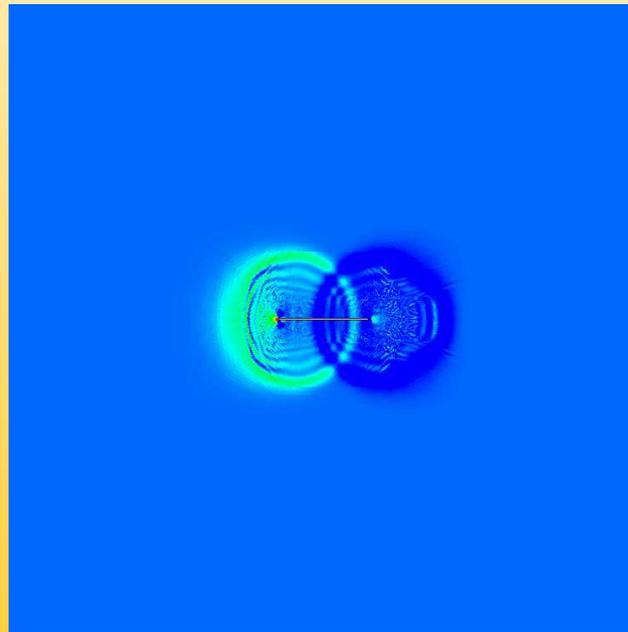
Beispiel

Zusammenfassung

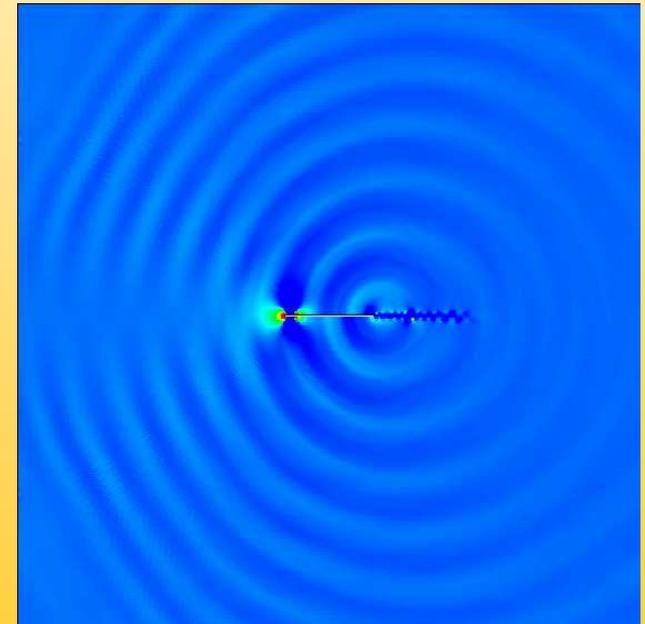
	$\frac{\#n(M=1)}{\#n(M)}$	theo.
struct. grid	-	
$M = 0.1$	25	100
$M = 0.005$	1000	40000



Numerische Simulation Druckschwankungen



$t = 550$



$t = 7500$

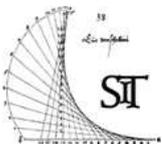
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

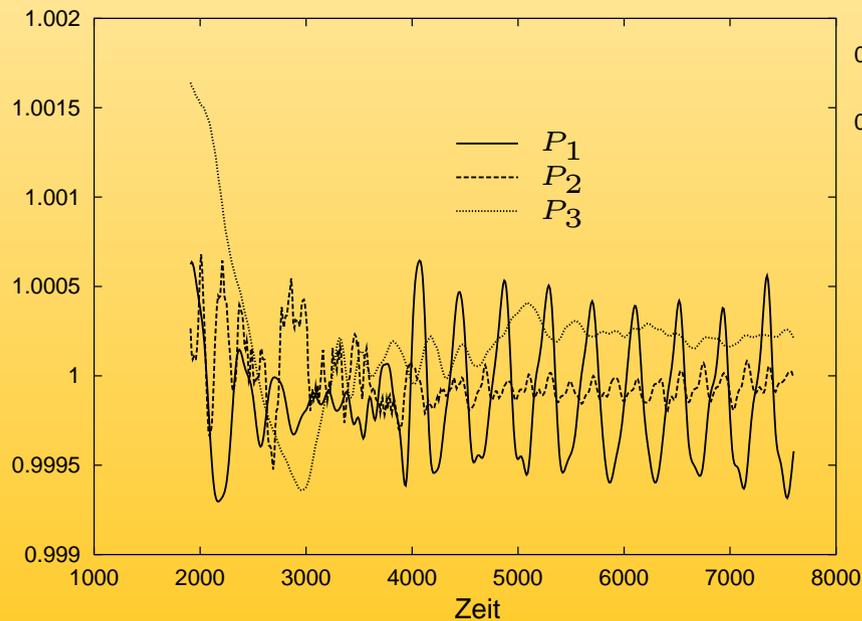
Beispiel

Zusammen-
fassung

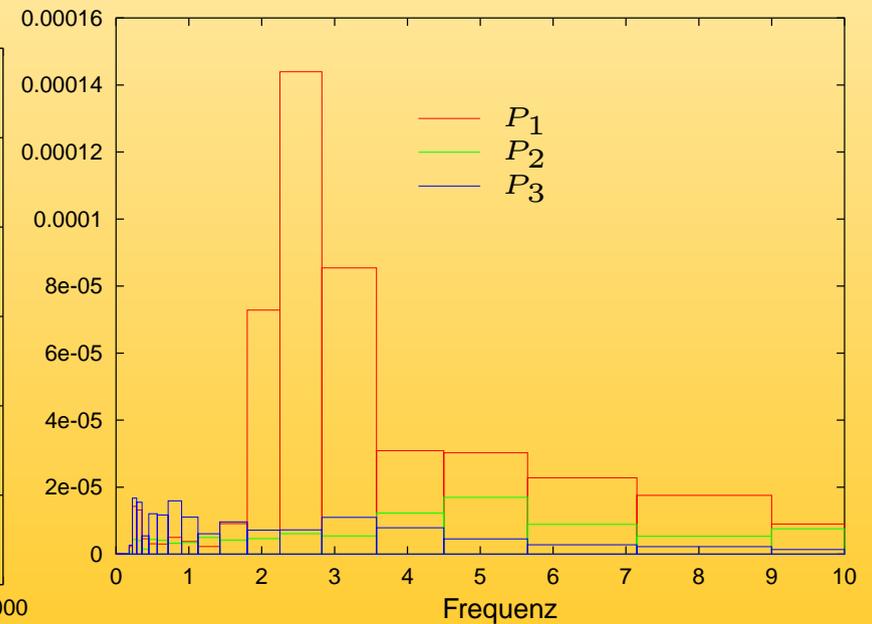


Numerische Simulation

Zeitverlauf
Druckschwankungen



Frequenzspektrum



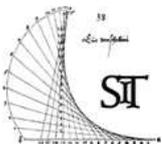
Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung



Numerische Simulation

Motivation

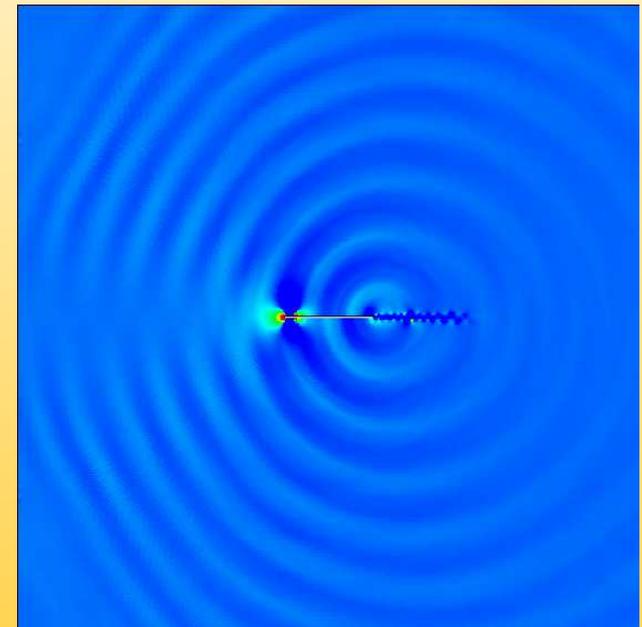
Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

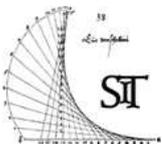
Beispiel

Zusammen-
fassung

- 25000 CPUh auf Pentium II 400 Mhz Cluster
- ~ 4000 CPUh auf Opteron 2Ghz Cluster
- ~ 250 CPUh mit τ -Extrapolation über 3 Gitterebenen



t = 7500



Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mehrskaligenkomplexität bei kleinen Machzahlen kann mit Hilfe eines unstrukturierten Gitters reduziert werden
- Gleichmäßige numerische Fehlerverteilung impliziert die Verwendung einer impliziten Zeitdiskretisierung
- Fractional-Step Verfahren zeigt ähnliche bzw. bessere numerische Fehlereigenschaften als ein explizites Verfahren höherer Ordnung
- Doppelter Vorteil bei Verwendung eines Mehrgitterverfahrens
 - Lösen des algebraischen Gleichungssystems
 - Höhere Genauigkeit durch τ -Extrapolation. Reduktion der benötigten Unbekannten

Motivation

Eingitter-
Ansatz

Genauigkeit

Beispiel

Zusammen-
fassung

