
<u>Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2013:</u>

<u>ΘΕΜΑ 1</u> (μονάδες 2.5)

Καμπύλη Bezier δημιουργείται από 3 σημεία ελέγχου, που κατά σειρά είναι τα: (0,0), (K,L) και (2,0). Η συντεταγμένη K του ενδιάμεσου σημείου ελέγχου πρέπει να κείται στο [0,2]. Δείξτε ότι αν το L είναι σταθερό, το εμβαδόν που σχηματίζεται μεταξύ της προκύπτουσας καμπύλης Bezier και του οριζόντιου άξονα δεν εξαρτάται από την τιμή του K. Βρείτε την τιμή του εμβαδού συναρτήσει του L.

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (μονάδες 2.5)

Η άσκηση αφορά στη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Legendre για ολοκληρώματα της μορφής $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx$, με τη διαφορά ότι η ολοκλήρωση δεν θα γίνεται στα N+1 συγκεκριμένα σημεία (ή ρίζες ή κόμβους Gauss: $x_0, x_1, \ldots, x_N$) όπως αυτά που έχετε πινακοποιημένα στο βιβλίο σας αλλά σε N+1 σημεία τοποθετημένα αυθαίρετα (αλλά με μονοτόνως αύξοντα τρόπο) στο διάστημα [-1,1]. Αν η $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού K, ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του K (εκφρασμένη, προφανώς, συναρτήσει του N) για την οποία το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται ακριβώς. Κάντε μια πειστική αριθμητική επίδειξη της απάντησής σας για N=3 (διαλέγοντας δικές σας τιμές για τα x_0, x_1, x_2, x_3).

<u>ΘΕΜΑ 3</u> (μονάδες 3 + 2)

Η κατανομή του συνολικού εισοδήματος του πληθυσμού μιας χώρας της Ευρώπης δίνεται στον παρακάτω πίνακα με τη μορφή διακριτών δεδομένων μιας καμπύλης Lorenz, η οποια συσχετίζει το αθροιστικό ποσοστό του πληθυσμού, έστω x%, με το συνολικό αθροιστικό εισόδημα που του αντιστοιχεί, έστω L(x) %.

% του πληθυσμού, x	0	10	20	40	60	80	90	100
% του ολικού εισοδήματος, L(x)	0	3	7.5	20	37	60	75	100

Ο δείκτης ανισότητας κατανομής εισοδήματος Gini ορίζεται ίσος με $1-2\cdot10^{-4}\int_0^{100} L(x)dx$, και κυμαίνεται θεωρητικά μεταξύ 0 και 1 (0 για απολύτως ίση κατανομή εισοδήματος).

α) Ζητείται να υπολογίσετε με τα δεδομένα του πίνακα και αριθμητική ολοκλήρωση την τιμή του δείκτη Gini για την εν λόγω χώρα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο συνδυασμό Γενικών μεθόδων ολοκλήρωσης, ώστε να επιτύχετε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια (αιτιολογήστε με σαφήνεια την επιλογή σας).

β) Έστω ότι επιβάλλεται μείωση του εισοδήματος στο f% του αρχικού για το 90% του πληθυσμού, εκτός δηλαδή του 10% πλουσιότερου τμήματος, ενώ το συνολικό εισόδημα όλου του πληθυσμού παραμένει σταθερό. Ζητείται να βρεθεί η τιμή του f ώστε ο δείκτης Gini να γίνει ίσος με 0.63, δηλαδή να φθάσει στα υψηλότερα επίπεδα στον κόσμο (Νότιος Αφρική, Ναμίμπια, κλπ.).

Λύση Θέματος 1:

Η παραμετρική εξίσωση της πρώτης καμπύλης Bezier, με 3 (άρα N=2) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t)=\sum_{i=0}^{N} C_i(t)X_i \qquad \text{και} \qquad y(t)=\sum_{i=0}^{N} C_i(t)Y_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $(X_0,Y_0),\ldots,(X_4,Y_4)$ τα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

και, συνεπώς, εδώ, η καμπύλη Bezier είναι η

$$x(t)=\left(2t-2t^2\right)K+2t^2$$
$$y(t)=(2t-2t^2)L$$

Το εμβαδόν Ε του χωρίου που αναφέρεται δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E=\int_0^2 y dx = \int_0^1 y\dot{x} dt$$

όπου $\dot{x}(t)=\dfrac{dx}{dt}=2K+(4-4K)t$. Η ολοκλήρωση γίνεται αναλυτικά και δίνει

$$E=4KL\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+L(8-12K)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+8L(K-1)\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{3}L$$

Συνεπώς, το εμβαδόν «κάτω από την καμπύλη Bezier» είναι το ίδιο, για οποιαδήποτε τιμή του K, αρκεί το L να είναι σταθερό.

ΣΧΟΛΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΠΤΩΝ:

(α) Η σχέση $E=\int_0^1 y dt$ (σε πάρα-πάρα πολλά γραπτά) δεν δίνει το εμβαδόν! Το εμβαδόν το δίνει η $E=\int_0^2 y dx$! Η δεύτερη έχει τουλάχιστον μονάδες m^2, αν τα μήκη είναι σε m! Δείτε τι μονάδες έχει η πρώτη σχέση! Σκεφτείτε ακόμη το εξής παράδειγμα: διπλασιάζω κάθε διάσταση του σχήματος. Το εμβαδόν πρέπει να τετραπλασιαστεί. Δείτε τι δίνει ο πρώτος τύπος και τι ο δεύτερος!!!

(β) Σχέσεις για το εμβαδόν όπως οι $E=\int_0^1 xdt+\int_0^1 ydt$ ή $E=\int_0^1 xydt$ ή $E=\int_0^1 y$ κλπ δεν στέκουν….

(γ) Η απάντηση (όχι από ένα σπουδαστή μόνο) ότι το ολοκλήρωμα (δηλαδή το εμβαδόν) είναι ανεξάρτητο του Κ επειδή τα όρια ολοκλήρωσης είναι ανεξάρτητα του Κ ελέγχεται ως ανακριβής.

Λύση Θέματος 2:

Με σκοπό να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, έστω ότι έχουμε N+1 σημεία, τα $x_0, x_1, ..., x_N$. Για τα σημεία αυτά γνωρίσουμε και τις τιμές $y_0, y_1, ..., y_N$, όπου $y_i = f(x_i)$. Πρώτο βήμα είναι να δημιουργηθούν τα N+1 πολυώνυμα Lagrange για τα σημεία $x_0, x_1, ..., x_N$. Καθένα από αυτά θα είναι βαθμού N. Ας συμβολίζονται με $L_0(x), L_1(x), ..., L_N(x)$. Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα ολοκληρώματα $C_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx$ και, τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση $I = \sum_{k=0}^{N} C_i f(x_i)$.

Μια τέτοια μέθοδος θα είναι ακριβής αν η f(x) είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού N. Ο λόγος είναι ότι κάθε σύνολο N+1 σημείων παρεμβάλλει με ακρίβεια ένα πολυώνυμο βαθμού N.

Αριθμητική εφαρμογή: Για N=3, διαλέγουμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ με κόμβους Gauss τα σημεία $x_0 = -1,\ x_1 = -0.5,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 1$. Τότε θα είναι $y_0 = 0,\ y_1 = 5/8,\ y_2 = 15/8,\ y_3 = 4$. Τα πολυώνυμα Lagrange είναι

$$L_0(x) = \frac{(x+.5)(x-.5)(x-1)}{(-1+.5)(-1-.5)(-1-1)} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6},\ \text{κ.ο.κ.}$$

ενώ

$$C_0 = \int_{-1}^{1} L_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \right] dx = \frac{1}{9},\ \text{κ.ο.κ.}$$

Αρκεί πλέον να δειχθεί ότι η πράξη $I = \sum_{k=0}^{N} C_i f(x_i)$ θα δώσει την αναλυτική τιμή του ολοκληρώματος του παραπάνω πολυωνύμου.

Λύση Θέματος 3:

(α) Τα 8 δεδομένα σημεία της καμπύλης L(x) δημιουργούν N=7 υποδιαστήματα κατά x, που όμως δεν είναι όλα ίσα. Τα δύο πρώτα υποδιαστήματα, 0-10 και 10-20 είναι ίσα, άρα σε αυτά μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος Simpson 1/3. Το ίδιο ισχύει και για τα δύο τελευταία, 80-90 και 90-100. Τα υπόλοιπα τρία υποδιαστήματα, 20-40, 40-60 και 60-80 είναι ίσα μεταξύ τους, οπότε σε αυτά μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος Simpson 3/8. Με τον συνδυασμό αυτόν επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια με Γενικές μεθόδους ολοκλήρωσης.

Επομένως, η αριθμητική ολοκλήρωση της συνάρτησης L(x) γράφεται:

$$I = \int_0^{100} L(x)dx \approx I_{1/3} + I_{3/8} + I_{1/3} = (x_2 - x_0)\frac{L(x_0) + 4\cdot L(x_1) + L(x_2)}{6} +$$

$$= (x_5 - x_2)\frac{L(x_2) + 3\cdot L(x_3) + 3\cdot L(x_4) + L(x_5)}{8} + (x_7 - x_5)\frac{L(x_5) + 4\cdot L(x_6) + L(x_7)}{6} =$$

$$= 20\frac{0 + 4\cdot 3 + 7.5}{6} + (80 - 20)\frac{7.5 + 3\cdot 20 + 3\cdot 37 + 60}{8} + (100 - 80)\frac{60 + 4\cdot 75 + 100}{6} =$$

$$= 65 + 1788.75 + 1533.33 = 3387.083$$

Άρα, ο δείκτης Gini θα είναι: $G = 1 - 2\cdot 10^{-4}\cdot 3387.083 = 0.3226$

(b) Αφού το ολικό εισόδημα παραμένει σταθερό, το αρχικό ποσοστό του εισοδήματος του 90% του πληθυσμού θα πολλαπλασιαστεί επί f%, και το αποτέλεσμα θα εκφράζει το νέο ποσοστό ως προς το (ίδιο) ολικό εισόδημα.

Άρα, όλα τα σημεία της καμπύλης L(x) έως και το x=90% θα μεταβληθούν, ενώ το τελευταίο σημείο, $L(x_7)=100$ θα παραμείνει ίδιο. Εάν εφαρμόσουμε τον ίδιο συνδυασμό μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης για τη νέα καμπύλη L(x), όπως στο ερώτημα (α), τότε θα λάβουμε:

$$I_f = f\cdot I_{1/3} + f\cdot I_{3/8} + (x_7 - x_5)\frac{f\cdot L(x_5) + 4\cdot f\cdot L(x_6) + L(x_7)}{6} =$$

$$= f\cdot 65 + f\cdot 1788.75 + (100 - 80)\frac{f\cdot(60 + 4\cdot 75) + 100}{6} = 3053.75\cdot f + 333.333$$

Επομένως, για να γίνει ο δείκτης Gini ίσος με 0.63 θα πρέπει:

$$G = 0.63 = 1 - 2\cdot 10^{-4}\cdot(3053.75\cdot f + 333.333) \Rightarrow f = 0.4966$$

ή $f = 49.66\%$, δηλαδή το εισόδημα πρέπει να μειωθεί στο μισό.