
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2014:

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 5)

Δίνονται τα εξής (Μ+1=)5 σημεία στο επίπεδο (x,y): (0, 8), (1.2, 5), (1.8, 4), (4.2, 6), (6, 5). Χρήσιμο θα ήταν να τα απεικονίσετε σε ένα διάγραμμα. Επιθυμούμε να δημιουργήσουμε μια καμπύλη Bezier, με (Ν+1)=3 σημεία ελέγχου, η οποία να προσεγγίζει (στη λογική των ελαχίστων τετραγώνων) τα παραπάνω Μ+1 σημεία. Αν βολεύει, τα τρία σημεία ελέγχου θα μπορούσαν να είναι ισαπέχοντα κατά x. Προσέξτε ότι ακόμη και τα ακραία σημεία ελέγχου είναι ελεύθερα (μην σας παρασύρει ότι συνήθως αυτά είναι σταθερά και προκαθορισμένα). Δώστε τις εξισώσεις που λύνουν το πρόβλημα. Κάντε ένα μικρό αριθμό αριθμητικών αντικαταστάσεων, τόσες όσες αρκούν για να δείξετε ότι αν είχατε άνεση χρόνου, θα γίνονταν όλα σωστά. Για να βοηθηθεί η διόρθωση, παρακαλούμε να τηρήσετε τα σύμβολα Μ και Ν, όπως δίνονται παραπάνω.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 2)

Ζητείται να δημιουργηθεί μια έκφραση αριθμητικής επίλυσης σ.δ.ε. πολλών βημάτων τρίτης τάξης, δηλαδή να υπολογίζει με ακρίβεια το ολοκλήρωμα των στοιχειωδών πολυωνυμικών συναρτήσεων: $f(x) = 1$, $f(x) = x$ και $f(x) = x^2$, με την παρακάτω σχέση.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_i(x)dx = b_1 f_i + b_2 f_{i-1} + b_3 f_{i-2}$$

Για τον σκοπό αυτόν θα εφαρμόσετε τη μέθοδο καθορισμού συντελεστών, κατά την οποία υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών b_1, b_2 και b_3 με βάση την προηγούμενη σχέση, θέτοντας για διευκόλυνση το βήμα $\Delta x = 1$ και $x_{i-1} = 0$. Να επιλύσετε το σύστημα με τη μέθοδο Gauss-Jordan. Η τελική έκφραση που θα προκύψει είναι κλειστής ή ανοικτής ολοκλήρωσης, και πόσων βημάτων;

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 3)

Η μαθηματική σχέση που εκφράζει τη μετατόπιση ως συνάρτηση του χρόνου σε έναν μηχανισμό ανάρτησης είναι:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A \cdot \cos \mu t + B \cdot \sin \mu t\right)$$

Αν τη χρονική στιγμή t=0 ο μηχανισμός τίθεται σε κίνηση, ζητείται να βρεθεί:
α) Η χρονική στιγμή στην οποία η μετατόπιση μηδενίζεται για πρώτη φορά.
β) Η χρονική στιγμή στην οποία η μετατόπιση γίνεται για πρώτη φορά ίση με το μισό της αρχικής.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποια μέθοδο θέλετε, αλλά πρέπει να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. Δώστε τη λύση με ακρίβεια τουλάχιστον δύο σημαντικών ψηφίων.
Δίνονται οι τιμές των συντελεστών: $\lambda = -0.6$, $\mu = 2.5$, $A = 4$, $B = 5.3$

<u>Λύση Θέματος 1:</u>

Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης Bezier, με N+1=3 (άρα N=2) σημεία ελέγχου είναι η

$$x(t)=\sum_{i=0}^{N} C_i(t) X_i \qquad \text{και} \qquad y(t)=\sum_{i=0}^{N} C_i(t) Y_i$$

με $0 \le t \le 1$ και $(X_0,Y_0),...,(X_2,Y_2)$ τα σημεία ελέγχου. Είναι

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Μιας και η προσέγγιση θα γίνει στο διάστημα $0 \le x \le 6$, βολεύει να επιλεγούν ισαπέχοντα κατά x σημεία ελέγχου. Θα είναι

$$(X_0,Y_0)=(0,Y_0), \qquad (X_1,Y_1)=(3,Y_1) \quad \text{και} \quad (X_2,Y_2)=(6,Y_2)$$

και, συνεπώς, η καμπύλη Bezier είναι η

$$\begin{aligned} x(t) &= 6t \\ y(t) &= \left(1-2t+t^2\right)Y_0 + 2t(1-t)Y_1 + t^2 Y_2 \end{aligned},$$

Η επιλογή ισαπεχόντων σημείων ελέγχου βολεύει γιατί έτσι, και μόνο έτσι, η καμπύλη Bezier καταλήγει ουσιαστικά να μην είναι παραμετρική και να μπορεί το y(t) να εκφραστεί και ως y(x).

Η προσέγγιση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να γίνει είτε βασιζόμενη σε έκφραση y(t) ή y(x). Εδώ, τυχαία, επιλέγεται η επίλυση να γίνει με το πρώτο. Ως εκ τούτου, τα προς προσέγγιση (M+1) σημεία ξαναγράφονται με συντεταγμένες (t,y) ως εξής:

(t_i,y_i): (0, 8), (0.2, 5), (0.3, 4), (0.7, 6), (1, 5)

Σύμφωνα με τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων, ελαχιστοποιείται το συνολικό σφάλμα

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}\left[\left(1-2t+t^2\right)Y_0+2t(1-t)Y_1+t^2Y_2-y_i\right]^2$$

Απαιτώντας το μηδενισμό τριών παραγώγων

$$\frac{\partial E}{\partial Y_0}=\sum_{i=0}^{M}\left[\left(1-2t+t^2\right)Y_0+2t(1-t)Y_1+t^2Y_2-y_i\right]\left(1-2t+t^2\right)=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial Y_1}=\sum_{i=0}^{M}\left[\left(1-2t+t^2\right)Y_0+2t(1-t)Y_1+t^2Y_2-y_i\right]\left(2t(1-t)\right)=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial Y_2} = \sum_{i=0}^{M}\left[\left(1-2t+t^2\right)Y_0 + 2t(1-t)Y_1 + t^2 Y_2 - y_i\right]\left(t^2\right) = 0$$

Συνεπώς, διατυπώνεται και λύνεται το παρακάτω συμμετρικό σύστημα τριών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M}\left(1-2t+t^2\right)^2 & \sum_{i=0}^{M}2t(1-t)\left(1-2t+t^2\right) & \sum_{i=0}^{M}t^2\left(1-2t+t^2\right) \\ \sum_{i=0}^{M}2t(1-t)\left(1-2t+t^2\right) & \sum_{i=0}^{M}4t^2\left(1-t^2\right)^2 & \sum_{i=0}^{M}2t^3(1-t) \\ \sum_{i=0}^{M}t^2\left(1-2t+t^2\right) & \sum_{i=0}^{M}2t^3(1-t) & \sum_{i=0}^{M}4t^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{M}y_i\left(1-2t+t^2\right) \\ \sum_{i=0}^{M}y_i\,2t(1-t) \\ \sum_{i=0}^{M}y_i t^2 \end{bmatrix}$$

με αγνώστους τα Y_0, Y_1, Y_2.

<u>Λύση Θέματος 2:</u>

Από την εκφώνηση είναι: $x_{i-1} = 0$, $x_i = x_{i-1} + \Delta x = 1$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2$ και $x_{i-2} = x_{i-1} - \Delta x = -1$

Για $f(x) = 1$: $$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^2 1\cdot dx = 2 = b_1 + b_2 + b_3 \qquad (1)$$

Για $f(x) = x$: $$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^2 x\cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2 = b_1 x_i + b_2 x_{i-1} + b_3 x_{i-2} \Rightarrow 2 = b_1 - b_3 \qquad (2)$$

Για $f(x) = x^2$: $$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^2 x^2\cdot dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} = b_1 x_i^2 + b_2 x_{i-1}^2 + b_3 x_{i-2}^2 \Rightarrow \frac{8}{3} = b_1 + b_3 \qquad (3)$$

Το σύστημα των (1), (2) και (3) θα λυθεί με τη μέθοδο Gauss-Jordan, ως εξής:

Επαυξημένο μητρώο [A | B | I]:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 8/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \text{απαλοιφή } 1^{\eta\varsigma} \text{ στήλης} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2/3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \text{κανονικοποίηση } 2^{\eta\varsigma} \text{ γραμμής και απαλοιφή } 2^{\eta\varsigma} \text{ στήλης} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2/3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \text{κανονικοποίηση } 3^{\eta\varsigma} \text{ γραμμής και απαλοιφή } 3^{\eta\varsigma} \text{ στήλης} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/3 & 2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Άρα, $b_1 = 7/3$, $b_2 = -2/3$ και $b_3 = 1/3$, και $\left[A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Η τελική έκφραση αριθμητικής ολοκλήρωσης θα είναι:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_i(x)dx = y_{i+1} - y_{i-1} = b_1 f_i + b_2 f_{i-1} + b_3 f_{i-2} \quad \rightarrow \quad y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right)$$

Η σχέση αυτή είναι τριών βημάτων (k+1=3), αφού χρησιμοποιείται πληροφορία έως το i-k με k=2 (δηλ. η τιμή f_{i-2}). Επίσης, είναι ανοικτής ολοκλήρωσης, εφόσον δεν υπάρχει η f_{i+1} στο δεξί μέλος.

<u>Λύση Θέματος 3:</u>

α) $x(t) = 0 \;\rightarrow\; e^{-\lambda t}\left(A\cdot\cos\mu t + B\cdot\sin\mu t\right) = 0 \;\Rightarrow\; A\cdot\cos\mu t + B\cdot\sin\mu t = 0 \;\Rightarrow\; \tan(\mu\, t) = -\dfrac{A}{B}$

Άρα: $t = \dfrac{1}{\mu}\cdot\left[\arctan(-\dfrac{A}{B}) + k\cdot\pi\right] = \dfrac{1}{2.5}\cdot\left[\arctan(-\dfrac{4}{5.3}) + k\cdot\pi\right] = \dfrac{1}{2.5}\cdot\left(-0.646513 + k\cdot\pi\right)$

Για $k = 0 \rightarrow t < 0$, μη-αποδεκτό

Για $k = 1 \rightarrow t = 0.998$ s, δεκτό.

β) Για $t = 0 \rightarrow x(0) = A = 4$. Θέλουμε: $x(t) = x(0) / 2 = 2$.

Επομένως, ζητείται μία ρίζα της μη-γραμμικής εξίσωσης:

$f(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cdot\cos\mu t + B\cdot\sin\mu t\right) - 2 = 0$, στο διάστημα [0, 0.998]

Επιλογή μεθόδου και δικαιολόγηση:

- Μέθοδος διχοτόμησης διαστήματος: Επειδή η f(t) έχει αντίθετο πρόσημο στα άκρα του διαστήματος [0, 0.999]. Επομένως, η μέθοδος θα συγκλίνει, έστω κι αν χρειαστούν αρκετές επαναλήψεις. Όμως, δεν θα χρειαστεί αναλυτική παραγώγιση της f(t).

- Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής: Όπως η προηγούμενη, με πιθανώς ταχύτερη σύγκλιση, αλλά λίγο περισσότερες πράξεις ανά επανάληψη.

- Μέθοδος N-R: Επειδή η αναλυτική έκφραση της $1^{ης}$ παραγώγου προκύπτει σχετικά εύκολα και η μέθοδος, εάν συγκλίνει, θα χρειαστεί πολύ λίγες επαναλήψεις. Αρχική τιμή ~0.5. Όμως, υπάρχει πιθανότητα απόκλισης.

- Μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων: Αν και η σύγκλιση είναι δύσκολο να ελεγχθεί αναλυτικά, μπορούν να δοκιμασθούν εύκολα διάφορες εκφράσεις, κάποια από τις οποίες μπορεί να συγκλίνει (τυχόν απόκλιση συνήθως διαπιστώνεται από τις πρώτες επαναλήψεις).

Τελική λύση: $t \approx 0.795$ s.