4ο ΕΞ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Διδάσκων: Κ. Γιαννάκογλου - Σεπτέμβριος 2023
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Άσκηση 1: Υπολογίστε, με μέθοδο Romberg (με βάση τη μέθοδο τραπεζίου), το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 \left(3x + \frac{(1+K)}{x}\right) dx$. **K** είναι το τελευταίο ψηφίο του ΑΜΣ σας. Πινακοποιήστε τα ενδιάμεσα αποτελέσματα, σταματώντας στο 1° στοιχείο της 4ης στήλης. Είναι σημαντικά: (α) η σωστή εκτέλεση πράξεων με 5 δεκαδικά, (β) η παρουσίαση όλων των ενδιάμεσων πράξεων.

Λύση:

Με βάση το απλό κριτήριο τερματισμού, θα χρειαστούν 8 διαστήματα ή 9 κόμβοι/σημεία στο [1,3]. Εδώ η άσκηση λύνεται για K=1, οπότε

$$I = \int_1^3 \left(3x + \frac{2}{x}\right) dx \quad , \quad F(x) = 3x + \frac{2}{x}$$

Οι 9 τιμές του F(x) πού χρειάζονται είναι:

x=	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
F(x)=	5	5,35	5,833	6.392	7	7,639	8.3	8.977	9.666

(οι πράξεις που ακολουθούν έγιναν με περισσότερα δεκαδικά)

Συμπληρώνεται ο πίνακας Romberg:

14,66667	14,22222	14,19852	14,19726
14,33333	14,2	14,19728	
14,23333	14,19745		
14,20642			

Η 1η στήλη έχει κατά σειρά εφαρμογή τύπου τραπεζίου για ολοκλήρωση με 2, με 3, με 5 και με 9 σημεία. Οδεύοντας προς τα δεξιά, χρησιμοποιείται η σχέση

$$I_{i,j} = \frac{4^{j-1} I_{i+1,j-1} - I_{i,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Αποτέλεσμα: I = 14,19726.

Άσκηση 2: Κυβική B-spline (φυσική) παρεμβάλλει τα εξής 4 σημεία στο επίπεδο (x,y): (0,4), (2,3), (3,3) και (4,6). Γράψτε τα δύο συστήματα που θα λυθούν για να βρεθούν τα παραμετρικά κομβικά σημεία της καμπύλης. Συμπληρώστε τις λύσεις των συστημάτων, σε όσα κουτάκια χρειάζονται, στον επόμενο πίνακα (πάνω γραμμή για τα x, κάτω γραμμή για τα y). Για ευκολία, σας δίνονται δύο στοιχεία του πίνακα:

	-1.333	2.666				
	4.533	2.933				

Τέλος, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης παρεμβολής με τη μικρότερη τιμή του y. Μη-γραμμικές εξισώσεις λύνονται με αλγόριθμο σταθερού σημείου (2 επαναλήψεις αρκούν)

Λύση:

Τά δυο συστήματα γράφονται σέ διανυσματική γραφή:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{R}_{-1} \\ \vec{R}_0 \\ \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \\ \vec{R}_4 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου στό δεξί μέλος:

$\vec{r}_0 = (0,4)$, $\vec{r}_1 = (2,3)$, $\vec{r}_2 = (3,3)$, $\vec{r}_3 = (4,6)$.

(το πρώτο στοιχείο στο πρώτο σύστημα, το δεύτερο στό δεύτερο).

Η πρώτη σχέση στο σύστημα λέει ότι $\vec{R}_{-1} \equiv \vec{R}_1$

άρα ο δεδομένος πίνακας συμπληρώνεται ως:

2.666	-1.333	2.666	...
2.933	4.533	2.933	...
$\uparrow$ $\vec{R}_{-1}$	$\uparrow$ $\vec{R}_0$	$\uparrow$ $\vec{R}_1$	

Έχοντας τη «μισή» λύση έτοιμη είναι εύκολο νά λύσουμε και για τις υπόλοιπες 3+3=6 τιμές. Η λύση είναι

$R^x_i =$	2,666	-1.333	2.666	2.666	4.666	2.6666
$R^y_i =$	2,933	4.533	2.933	1.7333	8.1333	1.7333
	$i=-1$	0	1	2	3	4

Στο σημείο αυτό αξίζει νά απεικονίσει κάποιος στο (x,y) τά 4 σημεία $\vec{r}$ (τά δοσμένα) και τά 6 σημεία $\vec{R}$ (που μόλις υπολογίσθηκαν) και νά σχεδιάσει «με το χέρι»

τή γραμμή-καμπύλη πού παρεμβάλλει τά 4 πρώτα.
Εμφανώς γίνεται αντιληπτό που είναι το ελάχιστο y, που είναι τό διάστημα ανάμεσα στο $\vec{r}_1=(2,3)$ και $\vec{r}_2=(3,3)$.
Η y συντεταγμένη καθε σημείου τής καμπύλης στό διάστημα αυτό περιγράφεται ως

$$y(u) = b_\delta^0(1+u)\,4.5333 + b_\gamma^1(u)\,2.9333 + b_\beta^2(u-1)\,1.7333 + b_a^3(u-2)\,8.1333$$

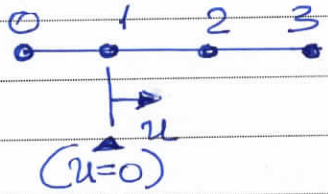
όπου:

$$b_\delta^0(1+u) = \frac{1}{6}(1-u^3) = \frac{1}{6}(1-3u+3u^2-u^3)$$

$$b_\gamma^1(u) = \frac{1}{6}(4-6u^2+3u^3)$$

$$b_\beta^2(u-1) = \frac{1}{6}(1+3u+3u^2-3u^3)$$

$$b_a^3(u-2) = \frac{1}{6}u^3$$



Απο τήν αντικατάσταση:

$$6\,y(u) = 17.9983 - 8.4u + 1.2u^2 + 7.2u^3$$

Τό σημείο με τό ελάχιστο y(u) θά είναι εκεί που

$$\frac{dy(u)}{du} = \emptyset \Rightarrow -8.4 + 2,4u + 21,6u^2 = \emptyset$$

Λύνεται με αλγόριθμο σταθερού σημείου λ.χ. ως.

$$u^{new} = \frac{8,4 - 2,4u^{old}}{21,6\,u^{old}}$$

Και παίρνουμε σύγκλιση (αν αρχικοποίηση =0,5) ως

$$0,5 \to 0,666 \to 0,47227 \to \cdots$$

ή οτιδήποτε αλλο σκεφτείτε. Η τελική λύση είναι $u=0,57052$
Πού δίνει

$$y_{Lowest} = 2.4889$$