1

4ο ΕΞ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Διδάσκων: Κ. Γιαννάκογλου - Ιούνιος 2024
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

<u>Άσκηση (7/10):</u> *(Δείτε τι συμβολίζεται με το γράμμα n, παρακάτω, και μην το μπερδέψετε με όποιο n ή n+1 ή N κ.ο.κ. χρησιμοποιείται στο βιβλίο. Τηρήστε τον παρακάτω συμβολισμό!)* Δημιουργούμε έναν τύπο Gauss-Quadrature για την προσέγγιση του $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, της μορφής: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong C_1 f(-1) + C_n f(1) + \sum_{i=2}^{n-1} C_i f(x_i)$. Παρατηρήστε ότι μοιάζει με τυπικό GQ, αλλά συμμετέχουν, υποχρεωτικά ως κόμβοι Gauss, και τα δύο ακραία σημεία του [-1,+1].

(α) Για συνολικά n=4 κόμβους Gauss, βρείτε με πράξεις στην κόλλα σας και πινακοποιήστε εν τέλει τις τιμές των C_i και x_i του ανωτέρω τύπου:

	i=1	i=2	i=3	i=4
x_i	-1	$-1/\sqrt{5}$	$+1/\sqrt{5}$	+1
C_i	1/6	5/6	5/6	1/6

(β) Ποια η ακρίβεια του τύπου και γιατί; Αν, για n κόμβους Gauss, σας έλεγαν ότι γενικά τέτοιοι τύποι είναι ακριβείς για πολυώνυμα μέχρι και βαθμού 2n-4 ή 2n-3, με ποιο από τα δύο θα συμφωνούσατε, με βάση τα ευρήματά σας;

(γ) Αν σας έλεγαν ότι οι παραπάνω συντελεστές, μόνο για τα εσωτερικά x_i, προκύπτουν και από τη σχέση $C_i = \frac{\lambda}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2}$ όπου $P_{n-1}(x)$ ορθογώνιο πολυώνυμο βαθμού n-1, πείτε ποιας οικογένειας θα είναι αυτό το πολυώνυμο και γιατί. Βρείτε την τιμή του λ και, εν τέλει, δείξτε ότι ο τύπος αυτός αναπαράγει τα πινακοποιημένα C_i, τουλάχιστον για n=4.

(δ) Αν σας έλεγαν ότι οι άγνωστες τιμές x_i (για τους εσωτερικούς κόμβους) είναι οι ρίζες της παραγώγου (ως προς x) του ορθογωνίου πολυωνύμου P_ρ, πείτε και πάλι ποιας οικογένειας θα είναι αυτό το πολυώνυμο και γιατί, βρείτε την τιμή του ρ συναρτήσει του n. Επαληθεύστε, προφανώς, τον πίνακα του ερ. (α).

(ε) Με εφαρμογή των ανωτέρω, βρείτε με πράξεις στην κόλλα σας και πινακοποιήστε εν τέλει τις τιμές των C_i και x_i, αυτή τη φορά για n=5 κόμβους Gauss:

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
x_i	-1	$-\sqrt{3/7}$	$\emptyset$	$+\sqrt{3/7}$	+1
C_i	1/10	49/90	32/45	49/90	1/10.

(στ) Για πολυώνυμο ως ποιου βαθμού (αριθμός;) είναι ακριβής η ολοκλήρωση του (ε) και γιατί;

<u>Λύση:</u>

(α) Κάθε σχήμα ολοκλήρωσης είναι συμμετρικό άρα:

$$x_2 \equiv x_3 \,,\quad C_1 \equiv C_4 \,,\quad C_2 \equiv C_3$$

και έτσι έχω 3 αγνώστους (x_2, C_1, C_2).

Πρέπει λοιπόν, να είναι ακριβές το ολοκλήρωμα

$$I = C_1 f(-1) + C_1 f(1) + C_2 f(x_2) + C_2 f(-x_2)$$

και γιά νά γίνει αυτό, ακριβώς όπως και στην GQ (Legendre) πρέπει να υπολογίζω ακριβώς τα τρία πρώτα μονώνυμα σε $\int_{-1}^{1} \dots dx$. Δηλαδή τα

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \,,\quad \int_{-1}^{1} x\,dx = \emptyset \,,\quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

ΟΧΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ

Άρα πρέπει : $2C_1 + 2C_2 = 2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1 - C_1}$ (από το 1ο) (1)

Όμως η 2η καταλήγει σε

$$-C_1 + C_1 + C_2x_2 - C_2x_2 = \varnothing \quad \text{(Ταυτότητα!!!)}.$$

Ενώ η τρίτη δίνει την $\boxed{C_1 + (1-C_1)x_2^2 = 1/3}$ (2)

Η «ταυτότητα» απαιτεί να απαιτήσω να είναι ακριβής και η ολοκλήρωση ενός ακόμη μονωνύμου. Όμως το

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \varnothing \quad \text{(πάλι μηδέν – ως περιττή συνάρτηση)}$$

οπότε αναγκαστικά καταφεύγουμε στην επόμενη:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{C_1 + (1-C_1)x_2^4 = \frac{1}{5}} \quad (3)$$

Το σύστημα των (1), (2), (3) είναι πρακτικά ένα 2×2 σύστημα που λύνεται εύκολα

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 + (1-C_1)x_2^2 = 1/3 \\ C_1 + (1-C_1)x_2^4 = 1/5 \end{array}\right\} \quad (\text{έστω } x_2^2 = \alpha \ldots)$$

και υπολογίζονται τα ικανοποιηθέντα αποτελέσματα της πρώτης σελίδας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ : Αν δεν ληφθεί υπόψη η συμμετρία, οδηγείστε σε μεγαλύτερο σύστημα (6x6 θεωρητικά). Η συμμετρία, όμως, «ακυρώνει» τα ολοκληρώματα περιττών συναρτήσεων και, για αυτό, παίρνουμε επιπλέον μονώνυμα μεγαλύτερης δύναμης.

(β) Με $n=4$ η ακρίβεια είναι μέχρι και για ολοκλήρωμα του x^5. (όχι του x^4! παρατηρήστε ότι και το επόμενο μονώνυμο $\int_{-1}^{1} x^5 dx = \varnothing$ ικανοποιείται ταυτοτικά!

Άρα $(2n-3)$!

(γ) Το $P_{n-1}(x)$ είναι, προφανώς, το $P_3(x)$ πολυώνυμο Legendre, μιας και ολοκληρώνουμε στο $[-1,1]$ με συνάρτηση βάρους τη μονάδα.

Άρα είναι $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. Πρέπει:
(γιά $n(n-1) = 4 \times 3 = 12$):

$$C_i = \frac{\lambda}{12 \cdot \frac{1}{4}(5x_i^3 - 3x_i)^2} \begin{cases} = 5/6 \text{ γιά } x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ = 5/6 \text{ γιά } x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Εξισώστε ένα από τά δύο (το 2° ικανοποιείται αυτόματα λόγω του τετραγώνου) και βρείτε $\boxed{\lambda = 2}$.
Άρα, οι εσωτερικοί συντελεστές βρίσκονται ως

$$C_i = \frac{2}{n(n-1)\left[P_{n-1}(x_i)\right]^2}$$

LEGENDRE

και τά ακραία (πρωτο-τελευταίο) C_i ως ίσα και ως συμπλήρωμα ώστε $\sum_{i=1}^{n} C_i = 2$.

(δ) Το P_g θα είναι προφανώς (καί πάλι) το Legendre και θά είναι $g = n-1$ γιατί πρέπει οι ρίζες του $P'_{n-1}(x)$ ← που είναι ένα πολυώνυμο $n-2$ βαθμού, άρα έχει $(n-2)$ ρίζες, νά είναι τα $(n-2)$ εσωτερικά σημεία. Εδώ π.χ.

$$P_3'(x) = \frac{1}{2}(15x^2 - 3) \quad \text{με ρίζες } \pm\sqrt{\frac{1}{5}}, \text{ ο.ε.δ.}$$

(ε) Δουλεύω πλέον με τους τύπους που απέδειξα

$$n = 5 \Rightarrow P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_4'(x) = \frac{x}{8}(140x^2 - 60) \rightarrow \text{ρίζες } 0, \pm\sqrt{3/7}$$

ενώ τά βάρη C_i από $\underset{i=2,3,4}{C_i} = \frac{2}{5 \cdot 4 \cdot P_4(x_i)^2}$ βλ. πίνακα.

(στ) Ακριβές μέχρι $(2n-3) = 10 - 3 = 7^{ου}$ βαθμού.

"Ιστορικά": η μέθοδος αυτή λέγεται GAUSS-LOBATTO!