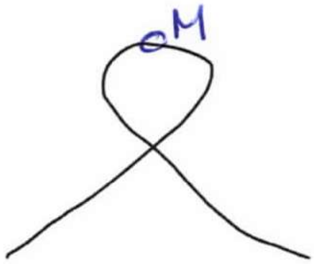
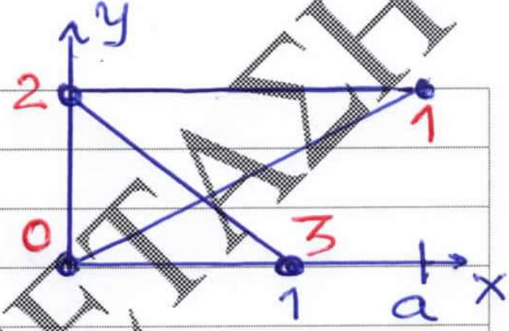
4ο ΕΞ. ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ – Διδάσκων: Κ. Γιαννάκογλου - Σεπτ. 2024
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Άσκηση 1 (5.5/10): Έστω καμπύλη Bezier που δημιουργήθηκε από 4 σημεία ελέγχου: (0,0), (α,1), (0,1), (1,0), με αυτήν τη σειρά. Είναι α>0. Κάντε ένα σκίτσο με τυχαία τιμή του α>0 για να καταλάβετε. Διερευνήστε, συναρτήσει του α, το πότε η προκύπτουσα καμπύλη Bezier σχηματίζει "φιόγκο", κάτι δηλαδή που μοιάζει με το διπλανό σκίτσο.
(χωρίς βλάβη της γενικότητας, δόθηκε λ=1, σε σχέση με την εξέταση)



Λύση:



Με 4 σημεία ελέγχου σε διάταξη όπως στο σκίτσο, η καμπύλη Bézier έχει εξισώσεις

$$x(t) = 3at - 6at^2 + (3a+1)t^3$$
$$y(t) = 3t - 3t^2$$

Για να κάνει "φιόγκο", στο ψηλότερο σημείο (M), που είναι εκεί πού $\dot{y}(t)=0$, άρα στο $t=1/2$ (όποιο και να είναι το a), πρέπει $\dot{x}(t)<0$. Είναι:

$$\dot{x}(t) = 3a - 12at + (9a+3)t^2$$

(Το πολυώνυμο αυτό πρέπει να έχει δύο ρίζες στο (0,1). Οι ρίζες του δεν χρειάζεται καν να βρεθούν όπως κάνατε αρκετές/οί))

Είναι

$$\dot{x}(t=1/2) < 0 \Rightarrow 3a - 6a + \frac{9}{4}a + \frac{3}{4} < 0$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{4}a + \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow a > 1$$

Άρα γίνεται "φιόγκος" αν $a>1$.

Άσκηση 2 (1.3/10): Να λυθεί, με Runge-Kutta 2ης τάξης, το σύστημα των δύο σ.δ.ε.:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \qquad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$ με αρχικές τιμές: το x(t=0)=0.5, y(t=0)=0.

Βήμα ολοκλήρωσης Δt=0.1, πράξεις με 5 δεκαδικά ψηφία.

Λύση:

Εφαρμογή τύπων Βιβλίου
Σωστές πράξεις !

t	x(t)	y(t)
0	0.50	0.0
0.1	0.30513	0.06838
0.2	0.14139	0.07152

Ερωτήσεις (3.2/10): **(Ε1)** Με «μια φράση» και χωρίς πράξεις εξηγήστε με τι ισούται το ολοκλήρωμα, στο διάστημα [-1:1], του 20ου πολυωνύμου Legendre (αυτού με όρο υψηλότερης τάξης τον x^{19}). Δεν χρειάζεται καν να βρείτε το πολυώνυμο.

(Ε2) Αν f(x) είναι πολυώνυμο, ποιος ο μεγαλύτερος βαθμός του (& γιατί) για τον οποίο ο τύπος

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{15}\left[7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - f'(1)\right]$$

(όπου f'=df/dx) είναι ακριβής; Σχολιάστε τιμές και πρόσημα στους παραπάνω συντελεστές. Προσπαθήστε να απαντήστε έξυπνα, με ελάχιστες πράξεις.

(Ε3) Αν για να λυθεί η x^3=λ σας προτείνουν το σχήμα $x^{n+1} = x^n - \frac{x^3-\lambda}{3x^2}$, τι άλλο θα μπορούσε αυτό να είναι πέραν της Newton-Raphson; Θα συγκλίνει αν ξεκινήσετε κοντά στη λύση;

(Ε4) Ονοματίστε δύο ουσιαστικές διαφορές μιας ανοικτής και μιας κλειστής μεθόδου επίλυσης σ.δ.ε. που έχουν το ίδιο r και σφάλμα ίδιας τάξης. Δώστε ένα παράδειγμα.

(Ε1) Αν $L_{19}(x)$ είναι το πολυωνυμο, τοτε το

$$\int_{-1}^{1} L_{19}(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot L_{19}(x)dx = \int_{-1}^{1} L_0(x) \cdot L_{19}(x)\, dx = \emptyset$$

μιάς και $L_0(x)$ και $L_{19}(x)$ είναι ορθογωνια στο [-1:1].

(Ε2) Είναι ακριβής τυπος ολοκληρωσης γιά τα πρωτα 5 μονωνυμα (x^0 ως και x^4), μιάς και έτσι φτιάχτηκαν οι συντελεστές, κατά τη θεωρία. Ομως, για το επομενο μονωνυμο (x^5) είναι $\int_{-1}^{1} x^5 dx$ (προφανώς, ως περιττή συνάρτηση). Ομως, γιά μιά τέτοια συνάρτηση, και ο παραπανω τυπος δίνει μηδεν.

Αποτελεσμα : τυπος ακριβής ως και το x^5

(Ε3) Είναι και μιά εκδοχή αλγορίθμου σταθερού σημείου, αφού

$$x = x - \frac{x^3-\lambda}{3x^2} \Rightarrow \cancel{3x^3} = \cancel{3x^3} - x^3 + \lambda \Rightarrow x^3 = \lambda.$$

Ελέγξτε με το γνωστό κριτήριο σύγκλισης (με την |παράγωγο|).

(Ε4) ... τα λέει το βιβλίο που είχατε μαζί σας. Δείξτε πχ γιά παράδειγμα το

Ανοιχτή ($k=3, r=3$) vs. Κλειστή ($k=1, r=3$)

ή

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}\Delta x\,(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) + O(\Delta x^5)$$

vs.

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) + O(\Delta x^5)$$