NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Fluids Section - Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

Αριθμητική Επίλυση Συστημάτων Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Κυριάκος Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Εισαγωγή – Οι πιο βασικές μέθοδοι

- **Η επίδειξη που ακολουθεί γίνεται για μικρά συστήματα (2x2 ή 3x3) αλλά γενικεύεται εύκολα για οποιαδήποτε συστήματα.**
- **Μέθοδος των διαδοχικών αντικαταστάσεων**

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων

►**Παράδειγμα 2 εξισώσεων**

$$x = f(x,y) \qquad x^{(n+1)} = f\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right)$$
$$y = g(x,y) \quad \Rightarrow \quad y^{(n+1)} = g\left(x^{(n+1)}, y^{(n)}\right)$$

►**Παράδειγμα 3 εξισώσεων**

$$x = X(x,y,z) \qquad x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y = Y(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n+1)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z = Z(x,y,z) \qquad z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n)}\right]$$

«Λογική» Jacobi ή Gauss-Seidel

Ενδεικτικά στο παράδειγμα 3 εξισώσεων

►Jacobi:

$$x = X(x,y,z) \qquad\qquad x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y = Y(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z = Z(x,y,z) \qquad\qquad z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$

►Gauss-Seidel:

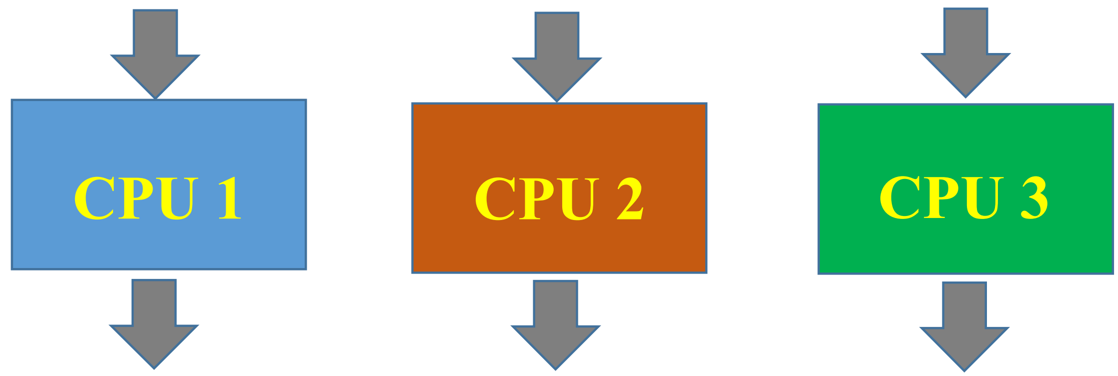
$$x = X(x,y,z) \qquad\qquad x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y = Y(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n+1)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z = Z(x,y,z) \qquad\qquad z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n)}\right]$$

Παρατηρήστε καλά τι είναι OLD (n) και τι NEW (n+1) στο δεξί μέλος.

Παραλληλοποίηση: Jacobi ή Gauss-Seidel

Ενδεικτικά στο παράδειγμα 3 εξισώσεων

$$\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$



►Jacobi:

$$x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$

►Gauss-Seidel:

$$x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n+1)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n)}\right]$$

$$x^{(n+1)} = X\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$y^{(n+1)} = Y\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$
$$z^{(n+1)} = Z\left[x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}\right]$$

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων

Αναγκαίες Συνθήκες Σύγκλισης

$$x = f(x,y)$$
$$y = g(x,y)$$

$$\Rightarrow$$

$$x^{(n+1)} = f\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right)$$
$$y^{(n+1)} = g\left(x^{(n+1)}, y^{(n)}\right)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < 1$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < 1$$

Μέθοδος Newton-Raphson

Παράδειγμα σε σύστημα 2x2:

$$f(x_0 y_0)=0$$
$$g(x_0,y_0)=0$$

$$f(x_0 y_0)=f(x_i,y_i)+(x_i-x_0)f_x+(y_i-y_0)f_y$$
$$g(x_0,y_0)=g(x_i,y_i)+(x_i-x_0)g_x+(y_i-y_0)g_y$$

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}-\frac{fg_y-gf_y}{J(f,g)}$$
$$y^{(n+1)}=y^{(n)}-\frac{gf_x-fg_x}{J(f,g)}$$

με οτιδήποτε είναι στο δεξί μέλος να υπολογίζεται με τις τιμές των x και y της τελευταίας επανάληψης. Κοινός παρονομαστής η Ιακωβιανή (Jacobian):

$$J(f,g)=f_x g_y-g_x f_y$$

Η Μέθοδος του Στόχου

Παράδειγμα σε σύστημα 2x2:

$$f(x,y)=0$$
$$g(x,y)=0$$

$$\Rightarrow \quad f^2+g^2=0$$