NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of Mechanical Engineering
Lab. Of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit (PCOpt/NTUA)

Μέθοδοι Πολλών Βημάτων για Αρ. Επίλυση ΣΔΕ

Kyriakos C. GIANNAKOGLOU, Professor NTUA
kgianna@mail.ntua.gr
http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research

Αρ. Επίλυσης ΣΔΕ με τη Μέθοδο Euler - Υπενθύμιση

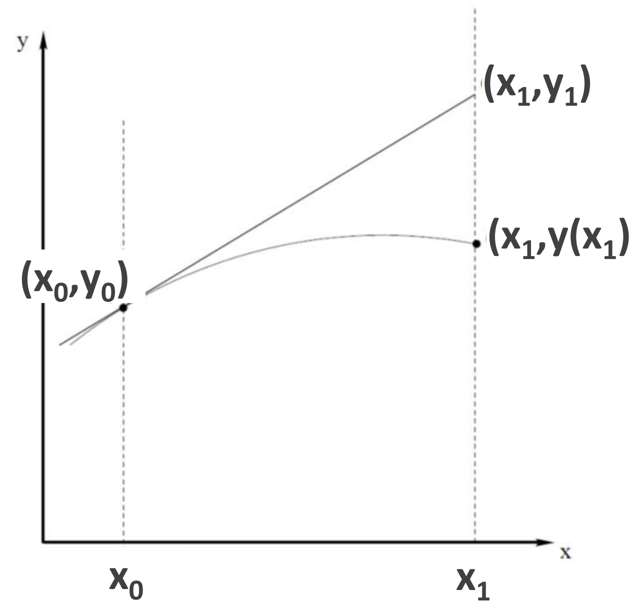
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\,(x\;,\;y\,) \\ y(x_0) &= y_0 = known \end{aligned}}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\; f(x_i, y_i) \qquad , \quad i \geq 1$$

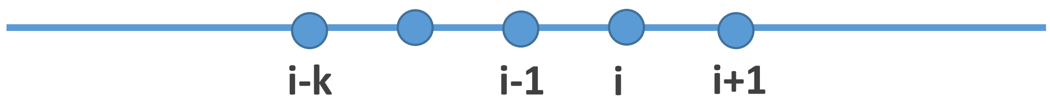
Επαναδιατύπωση (μονοβηματικό σχήμα) ως:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i dx$$

όπου σημασία έχει τι είναι το f_i.
Αντιστοίχιση με τη μέθοδο του ορθογωνίου το χαμηλότερης ακρίβειας σχήμα ολοκλήρωσης)



Η Ιδέα μιας Πολυβηματικής Μεθόδου



Αντί του μονοβηματικού σχήματος:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i dx$$

ας χρησιμοποιηθεί ένα πολυβηματικό (γιατί να το κάνω?):

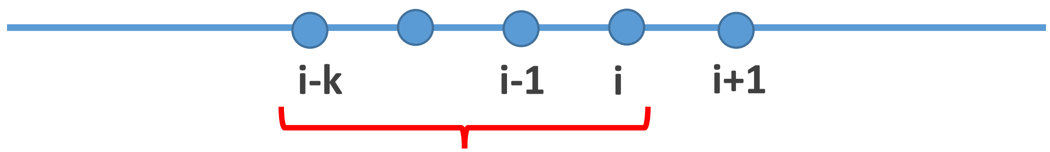
$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx$$

όπου ψ_i πολυώνυμο παρεμβολής της f ως προς x για το κλειστό διάστημα κόμβων [k,i].

Ή, μήπως, για το κλειστό διάστημα κόμβων [k,i+1]? Επιπλέον δυσκολίες! Γιατί να το κάνω τότε?

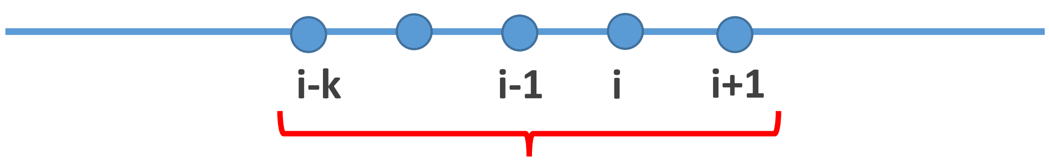
Πολυβηματική Μέθοδος: Σχέσεις Ανοικτής/Κλειστής Ολοκλήρωσης

Ανοικτή Ολοκλήρωση: Το ψ_i πολυώνυμο να παρεμβάλει την f ως προς x στο διάστημα κόμβων [k,i].



Το ψ_i πολυώνυμο να παρεμβάλει τα: (x_{i-k},f_{i-k}), (x_{i-k+1},f_{i-k+1}), …, (x_i,f_i)

Κλειστή Ολοκλήρωση: Το ψ_i πολυώνυμο να παρεμβάλει την f ως προς x στο διάστημα κόμβων [k,i+1].



Το ψ_i πολυώνυμο να παρεμβάλει τα: (x_{i-k},f_{i-k}), (x_{i-k+1},f_{i-k+1}), …, (x_i,f_i), (x_{i+1},f_{i+1})

Πολυβηματική Μέθοδος: Σχέσεις Ανοικτής/Κλειστής Ολοκλήρωσης

Το ψ_i κάνει πολυωνυμική παρεμβολή:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= a_1 y_i + a_2 y_{i-1} + \cdots + a_{k+1} y_{i-k} \\ &+ \Delta x \left[\underbrace{b_0 f(x_{i+1}, y_{i+1})} + b_1 f(x_i, y_i) + \cdots + b_{k+1} f(x_{i-k}, y_{i-k}) \right] \end{aligned}$$

Υπάρχει στην Κλειστή Ολοκλήρωση
Δεν υπάρχει στην Ανοικτή

$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \psi_i(x)\,dx$$

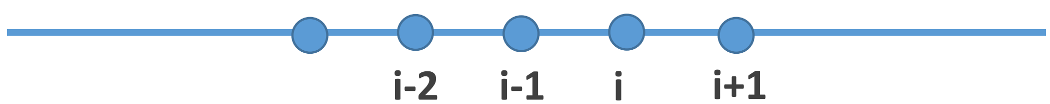
Ανάγκη Υπολογισμού των a_i και b_i

Ανάντι Πεπερασμένες Διαφορές

Προσέξτε τον συμβολισμό με το σύμβολο του «Ανάδελτα»:

Κόμβος i **Κόμβος i-1**

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x) &= f(x) - f(x-\Delta x)\\
\nabla^2 f(x) &= \nabla f(x) - \nabla f(x-\Delta x)\\
\nabla^3 f(x) &= \nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x-\Delta x)
\end{aligned}
$$



Αντιστοιχίστε το νέο συμβολισμό με τα διδαχθέντα στο μάθημα των Πεπερασμένων Διαφορών!

Παρεμβολή κατά Newton

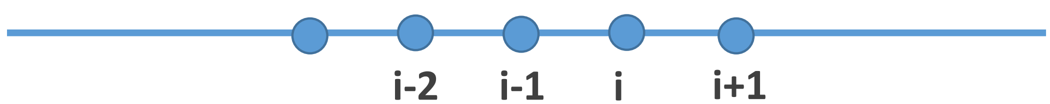
$$y_{i+1} = y_{i-k} + \Delta x \int_{-k}^{1} \psi_i(x_i + a\Delta x)da$$

Κατανοήστε το α:

$$a = \frac{x - x_i}{\Delta x} \qquad\qquad dx = \Delta x da$$

Παρεμβολή κατά Newton:

$$\begin{aligned}\psi_i(x_i + a\Delta x) &= f_i + a\nabla f_i + a(a+1)\frac{\nabla^2 f_i}{2!} + a(a+1)(a+2)\frac{\nabla^3 f_i}{3!} \\ &+ \cdots + a(a+1)(a+2)\ldots(a+r-1)\frac{\nabla^r f_i}{r!}\end{aligned}$$



Γενικές Σχέσεις Ανοικτής/Κλειστής Ολοκλήρωσης

Ότι χρειάζεστε σε μία διαφάνεια:

$$y_{i+1} = y_{i-k} + \Delta x \int_{-k}^{1} \psi_i(x_i + a\Delta x)da$$

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \psi_i(x)dx &= \Delta x \left[af_i + \frac{a^2}{2}\nabla f_i + a^2\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{\nabla^2 f_i}{2!} + a^2\left(\frac{a^2}{4}+a+1\right)\frac{\nabla^3 f_i}{3!}\right. \\ &+ \left. a^2\left(\frac{a^3}{5}+\frac{3a^2}{2}+\frac{11a}{3}+3\right)\frac{\nabla^4 f_i}{4!} + \ldots \right]_{a=-k}^{a=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= f(x) - f(x-\Delta x) \\ \nabla^2 f(x) &= \nabla f(x) - \nabla f(x-\Delta x) \\ \nabla^3 f(x) &= \nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(x-\Delta x)\end{aligned}$$

Σχέσεις Ανοικτής Ολοκλήρωσης

Για διάφορες τιμές του k:

- $k = 0$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left(f_i + \frac{1}{2}\nabla f_i + \frac{5}{12}\nabla^2 f_i + \frac{3}{8}\nabla^3 f_i + \frac{251}{720}\nabla^4 f_i + \ldots \right)$$

- $k = 1$:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \Delta x \left(2f_i + \frac{1}{3}\nabla^2 f_i + \frac{1}{3}\nabla^3 f_i + \frac{29}{90}\nabla^4 f_i + \ldots \right)$$

Μετά την επιλογή του k, πρέπει να επιλεγεί η αποκοπή (σύμβολο r)!

Σχέσεις Ανοικτής Ολοκλήρωσης

«Συνταγή»:
Επιλέγοντας περιττό k, εξαφανίζεται η k-παράγωγος. Επιλογή περιττού k και r=k.
Παράδειγμα τυπικής επιλογής k=r=3:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \Delta x \left(4f_i - 4\nabla f_i + \frac{8}{3}\nabla^2 f_i \right)$$

με σφάλμα:

$$\frac{14}{45}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$$

Συνηθισμένες Σχέσεις Ανοικτής Ολοκλήρωσης

$k = 1,\ r = 1$:

$$y_{i+1} \;=\; y_{i-1} + 2\Delta x f_i + O(\Delta x^3)$$

$k = 3,\ r = 3$:

$$y_{i+1} \;=\; y_{i-3} + \frac{4\Delta x}{3}\left(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right) + O(\Delta x^5)$$

$k = 5,\ r = 5$:

$$y_{i+1} \;=\; y_{i-5} + \frac{3\Delta x}{10}\left(11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}\right) + O(\Delta x^7)$$

Σχέσεις Κλειστής Ολοκλήρωσης

Αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_{i-k} + \Delta x \int_{-k}^{1} [\, f_{i+1} + (a-1)\nabla f_{i+1} + \frac{(a-1)a}{2!}\nabla^2 f_{i+1} + \frac{(a-1)a(a+1)}{3!}\nabla^3 f_{i+1} \\ &+ \cdots + \frac{(a-1)a(a+1)\ldots(a+r-2)}{r!}\nabla^r f_{i+1} \,]\, da \end{aligned}$$

Ή, μετά την ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_{i-k} + \Delta x \,[\, a f_{i+1} + a\left(\frac{a}{2}-1\right)\nabla f_{i+1} + \frac{a^2(\frac{a}{3}-\frac{1}{2})}{2!}\nabla^2 f_{i+1} + \frac{a^2(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2})}{3!}\nabla^3 f_{i+1} \\ &+ \frac{(\frac{a^5}{5}+\frac{a^4}{2}-\frac{a^3}{3}-a^2)}{4!}\nabla^4 f_{i+1} + \ldots \,]_{-k}^{1} \end{aligned}$$

Συνηθισμένες Σχέσεις Κλειστής Ολοκλήρωσης

$k = 1,\ r = 3$:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}\right) + O(\Delta x^5)$$

$k = 3,\ r = 5$:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2\Delta x}{45}\left(7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}\right) + O(\Delta x^7)$$

την οποία λχ μπορείτε να αποδείξετε με αντικατάσταση στην:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \Delta x\left(4f_{i+1} - 8\nabla f_{i+1} + \frac{20}{3}\nabla^2 f_{i+1} - \frac{8}{3}\nabla^3 f_{i+1} + \frac{14}{45}\nabla^4 f_{i+1}\right) + O(\Delta x^7)$$

Διαχείριση του άγνωστου f_{i+1}! Ανάγκη Επαναλήψεων ή …

Ενδεικτική Σύγκριση Ανοικτής και Κλειστής Ολοκλήρωσης

ΑΝΟΙΧΤΗ $k=3, r=3$:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4\Delta x}{3}\left(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right) + \frac{14}{15}\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$(x_{i-3} < \xi < x_{i+1})$$

ΚΛΕΙΣΤΗ $k=1, r=3$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}\right) + \left(-\frac{1}{90}\right)\Delta x^5 f^{(4)}(\xi)$$

Απλότητα Vs. Ακρίβεια!

Σχήματα Πρόβλεψης-Διόρθωσης (Predictor-Corrector)

Μέθοδος Milne 4ης Τάξης:

Πρόβλεψη: **(Ανοικτή k=3, r=3)**

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4\Delta x}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) + O(\Delta x^5)$$

Διόρθωση: **(Κλειστή k=1, r=3) – επαναληπτικά?**

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) + O(\Delta x^5)$$

Σχήματα Πρόβλεψης-Διόρθωσης (Predictor-Corrector)

Μέθοδος Milne 6ης Τάξης:

Πρόβλεψη: **(Ανοικτή k=5, r=5)**

$$y_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3\Delta x}{10}\left(11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}\right) + O(\Delta x^7)$$

(Κλειστή k=3, r=5) – επαναληπτικά?

Διόρθωση:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2\Delta x}{45}\left(7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}\right) + O(\Delta x^7)$$

Σχήματα Πρόβλεψης-Διόρθωσης (Predictor-Corrector)

Μέθοδος Adams-Moulton:

Πρόβλεψη: **Τι είναι;**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) + O(\Delta x^5)$$

Διόρθωση: **Τι είναι;**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) + O(\Delta x^5)$$