ΜΑΘΗΜΑ 3ου ΕΞΑΜΗΝΟΥ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

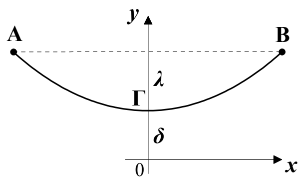
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ή ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 2-1

Η μορφή ενός καλωδίου ηλεκτρικού ρεύματος, που αναρτάται από δύο ισοϋψή σημεία Α και Β σε απόσταση L, περιγράφεται από τη λεγόμενη ‘αλυσοειδή’ συνάρτηση, ως εξής:

$$y = \delta \cdot \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right)$$



όπου η αρχή του συστήματος συντεταγμένων $(x, y) = (0, 0)$ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ και σε απόσταση δ (βλ. σχήμα) από το κατώτατο σημείο Γ του καλωδίου. Ορίζεται επίσης η κατακόρυφη απόσταση λ του σημείου Γ από τα Α ή Β. Ζητείται:

α) Να γράψετε την εξίσωση που, για δεδομένα L και λ ενός καλωδίου, υπολογίζει την απόσταση δ που αντιστοιχεί. Ποιος είναι ο τύπος της εξίσωσης;

β) Έστω ότι για καλώδιο με L=120 m και λ=20 m γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού του δ, που είναι το (0, 200] m. Να εντοπίσετε μια περιοχή που περιέχει τη ρίζα της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, με εύρος το πολύ 50 m.

γ) Πόσες επαναλήψεις θα απαιτούσε η μέθοδος διχοτόμησης του διαστήματος, ώστε να προσεγγίσει την τιμή του δ με ακρίβεια (απόλυτη) 0.01 m, ξεκινώντας από αρχικό διάστημα εύρους 50 m;

δ) Για τα αριθμητικά δεδομένα του ερωτήματος (β) να υπολογίσετε τη ρίζα δ με τη μέθοδο Newton-Raphson και με ακρίβεια τεσσάρων (4) σημαντικών ψηφίων, εκκινώντας από το μέσο της περιοχής που εντοπίσθηκε.

Βοηθητικές σχέσεις:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \cdot \frac{du}{dx},$$

$$\int \sinh(ax)\,dx = \frac{\cosh(ax)}{a}, \qquad \int \cosh(ax)\,dx = \frac{\sinh(ax)}{a}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2-2

Οικονομοτεχνικές μελέτες έδειξαν ότι η τοποθέτηση Ν κεραιών κινητής τηλεφωνίας στην απόσταση Αθήνας-Χαλκίδας (70 χλμ) πρέπει να γίνεται σύμφωνα με γεωμετρική πρόοδο. Υιοθετείστε αύξουσα αρίθμηση των κεραιών από Αθήνα προς Χαλκίδα (1=κεραία Αθήνας, Ν =κεραία Χαλκίδας). Ο λόγος της ω πρέπει να είναι τέτοιος ώστε η απόσταση κεραιών 1→2 (πιο πυκνοκατοικημένη περιοχή) να είναι μικρότερη της απόστασης κεραιών (Ν-1)→Ν. Η απόσταση της πρώτης κεραίας από την Αθήνα είναι ίση με 1 χλμ.

(α) Υπολογίστε το λόγο της γεωμετρικής προόδου, για Ν=11 κεραίες, με μέθοδο Newton. Κάνετε 4 επαναλήψεις, δείχνοντας οποιαδήποτε ενδιάμεση πράξη, και δεχτείτε το τελικό αποτέλεσμα.

(β) Κάνετε το ίδιο με τη μέθοδο του σταθερού σημείου (διαδοχικών αντικαταστάσεων). Διερευνήστε ποια έκφραση συμφέρει να χρησιμοποιήσετε και με τι αρχική τιμή του αγνώστου. Σχολιάστε, το πόσο συμφωνούν με τη θεωρία αυτά που έδειξαν οι πράξεις σας.

Υπενθυμίζεται ότι: $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{\kappa-1}=\dfrac{\omega^{\kappa}-1}{\omega-1}$

ΑΣΚΗΣΗ 2-3

Να βρείτε τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $\alpha^3 - 5\cdot\alpha^2 + 6\cdot\alpha - 1 = 0$ στο διάστημα [0, +4], με την εξής διαδικασία: Πρώτα θα εντοπίσετε τις ρίζες με τη μέθοδο Ίσων Διαστημάτων (Δα=1) και στη συνέχεια θα υπολογίσετε μία εξ αυτών με τη μέθοδο Διχοτόμησης Διαστήματος, μία δεύτερη με τη μέθοδο Newton-Raphson και την τρίτη με τη μέθοδο Διαδοχικών Αντικαταστάσεων. Και στις τρεις περιπτώσεις αρκεί να εκτελέσετε 2 επαναλήψεις του αντίστοιχου αλγορίθμου.

ΑΣΚΗΣΗ 2-4

Επιλύστε αριθμητικά την $\dfrac{5}{x^5}+\dfrac{3}{x^4}=3$ στο διάστημα [1,4] με τη μέθοδο των Διαδοχικών Αντικαταστάσεων. Βρείτε μια διατύπωση που να συγκλίνει, εκτελέστε 4 κύκλους και σχολιάστε κάθε επιλογή σας. Βαθμολογείται ιδιαίτερα η ορθότητα των αριθμητικών πράξεων και ο σωστός σχολιασμός.

ΑΣΚΗΣΗ 2-5

Η ταχύτητα (σε m/sec) του αέρα που διαρρέει κάθετα μια διατομή εμβαδού 0.1m^2 σε θερμοκρασία 17^{o}C και πίεση 1 bar, με παροχή 20 kg/sec διέπεται από μια εξίσωση, που, για τα συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, γράφεται

$$V = 166\left(1 - \frac{V^2}{582610}\right)^{-2.5}$$

Η εξίσωση αυτή δέχεται δύο λύσεις, μια μικρότερη της τιμής 340 m/sec (=ταχύτητα του ήχου σε αυτές τις συνθήκες) που λέγεται υποηχητική και μια μεγαλύτερη αυτής που λέγεται υπερηχητική.. Δώστε την έκφραση που θα χρησιμοποιήσετε με τη μέθοδο του σταθερού σημείου (διαδοχικών επαναλήψεων) ώστε (α) να εντοπίσετε την υποηχητική λύση και (β) να εντοπίσετε την υπερηχητική λύση. Για βοήθεια δίνεται ότι η πρώτη λύση είναι κοντά στην τιμή 200 m/sec και η δεύτερη κοντά στην τιμή 430 m/sec. Σχολιάστε και εξηγήστε πως αναμένεται να συμπεριφερθεί κάθε ένα από τα δύο σχήματα που προτείνατε αν ξεκινήσουμε με αρχική τιμή 100 m/sec ή 500 m/sec αναζητώντας, τη μια φορά την υποηχητική λύση και την άλλη την υπερηχητική (τέσσερις περιπτώσεις).

ΑΣΚΗΣΗ 2-6

Κάθε φυσική συχνότητα ταλάντωσης (έστω x) μιας ομογενούς δοκού μοναδιαίου μήκους, που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\tan(x)\cdot\tanh(x) + 1 = 0, \qquad \text{όπου} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

α) Πόσες ρίζες έχει η παραπάνω εξίσωση στο διάστημα [0, π] και γιατί; Υπενθυμίζεται ότι $\tanh(x) \geq 0$ στο διάστημα [0, π].

β) Ζητείται να υπολογισθεί η μικρότερη φυσική συχνότητα ταλάντωσης x με τη μέθοδο της Διχοτόμησης. Για τον σκοπό αυτόν:
- να καθορίσετε ένα αρχικό διάστημα τιμών για την εκκίνηση της μεθόδου, δικαιολογώντας την επιλογή σας.
- να υπολογίσετε τον αριθμό των επαναλήψεων που θα χρειασθούν, ώστε να επιτευχθεί απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}.
- να εκτελέσετε τις πρώτες τρεις επαναλήψεις της μεθόδου.

γ) Χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις της ρίζας που προέκυψαν από τη μέθοδο της Διχοτόμησης στο (β), συνεχίστε τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσης με τη μέθοδο της Τέμνουσας, εκτελώντας μία μόνο επανάληψη. Ποιο θα είναι το κριτήριο τερματισμού της μεθόδου, εάν η ρίζα πρέπει να βρεθεί με ακρίβεια τουλάχιστον 5 σημαντικών ψηφίων;