



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛ. ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Προγραμματισμός λογισμικού αεροελαστικών
προσομοιώσεων και βελτιστοποίησης με χρήση
της διακριτής συζυγούς μεθόδου για ατριβείς
ροές. Εφαρμογές και Πιστοποίηση.

Διπλωματική εργασία
ΤΟΥ

Νικολάου Ε. Κάρκαλου

Επιβλέπων: Κ.Χ.Γιαννάκογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛ. ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Προγραμματισμός λογισμικού αεροελαστικών προσομοιώσεων και
βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για ατριβείς ροές.
Εφαρμογές και Πιστοποίηση.**

Διπλωματική εργασία
του

Νικολάου Ε. Κάρκαλου

Επιβλέπων: Κ.Χ.Γιαννάκογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Οκτώβριος 2012

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η ανάπτυξη ενός κώδικα στατικής αεροελαστικότητας για εφαρμογή σε πτέρυγα αεροσκάφους, ο οποίος χρησιμοποιεί την προσέγγιση χαλαρής σύζευξης μεταξύ του κώδικα ανάλυσης της ροής και του κώδικα δομικής ανάλυσης. Ο κώδικας αυτός χρησιμοποιεί έναν πιστοποιημένο επιλύτη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών για την επίλυση των 3D εξισώσεων Euler (εδώ γύρω από πτέρυγα AGARD 445.6) και κώδικες υπολογιστικής δομικής μηχανικής που αναπτύχθηκαν και πιστοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Διερευνήθηκε η αποδοτικότητα της χρήσης διαφόρων ομοιόμορφων δομημένων πλεγμάτων για το δομικό κομμάτι και διατυπώθηκαν συμπεράσματα όσον αφορά τη σύγκλιση και την ακρίβεια του αλγορίθμου.

Επίσης, αναπτύχθηκε κώδικας για δομική βελτιστοποίηση (structural optimization) για μοντέλο δοκού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου στην οποία οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίστηκαν με τη χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου. Τέλος, η ίδια μέθοδος εφαρμόστηκε σε ένα πιο σύνθετο πρόβλημα, στην περίπτωση βελτιστοποίησης σχήματος μιας πτέρυγας αεροσκάφους υπό την επίδραση αεροδυναμικών φορτίων στην οποία χρησιμοποιήθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων δοκού για το δομικό κομμάτι και πιστοποιημένος επιλύτης της ΜΠΥΡ&Β για επίλυση των 2D εξισώσεων Euler για το αεροδυναμικό κομμάτι. Διαπιστώθηκε η ταχεία σύγκλιση της διαδικασίας στην επιθυμητή λύση και προτάθηκαν αλλαγές στον κώδικα για να συμπεριληφθεί και η συνεισφορά αεροδυναμικών μεγεθών στη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Λέξεις-κλειδιά: στατική αεροελαστικότητα, προσέγγιση χαλαρής σύζευξης, δομική ανάλυση και βελτιστοποίηση, διακριτή συζυγής μέθοδος, αεροελαστική βελτιστοποίηση



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD AND OPTIMIZATION UNIT

Programming of software for the aeroelastic analysis and optimization based on the discrete adjoint method for inviscid flows. Applications and Assessment

Diploma Thesis

by

Nikolaos E. Karkalos

Supervisor: K.C.Giannakoglou
Professor, N.T.U.A

October 2012

ABSTRACT

In this diploma thesis, a static aeroelastic code for aircraft wings was programmed, using the loosely coupled approach between the flow solver and the structural analysis code. The final software comprises of a tested Computational Fluid Dynamics solver by the Parallel CFD and Optimization Unit of the Laboratory of Thermal Turbomachines which solves the 3D Euler equations (herein around an AGARD 445.6 wing) and Computational Structural Mechanics (CSM) solvers which were programmed and validated in this diploma thesis. The efficiency of using several uniform grids was investigated for the structural analysis part of the aeroelastic code and conclusions were made concerning the convergence and accuracy of the algorithm.

In addition to the aeroelastic code, a structural optimization code was programmed for a beam element Finite Elements (FE) model using the steepest descent method in which sensitivity derivatives were calculated with the discrete adjoint method. Finally, the same method was applied to a more complicated case, the case of the shape optimization of an aircraft wing under aerodynamic loading for which a CSM beam FE model was used (in FORTRAN 77 language) along with a tested 2D Euler equations CFD solver by the Parallel CFD and Optimization Unit. The fast convergence towards the optimal solution was noted and adjustments were proposed in order to include the contribution of aerodynamic quantities in the optimization process.

Keywords: static aeroelasticity, loosely coupled approach, structural analysis and optimization, discrete adjoint method, aeroelastic optimization

ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με αφορμή την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα της διπλωματικής καθηγητή ΕΜΠ κ. Κ.Χ.Γιαννάκογλου για την ουσιαστική καθοδήγησή του, τον χρόνο που αφιέρωσε και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Ευχαριστώ επίσης τους διδάκτορες ΕΜΠ κ. Ξενοφώντα Τρομπούκη και κα. Βαρβάρα Ασούτη για την πολύτιμη βοήθειά τους σε διάφορα θέματα της παρούσας εργασίας, καθώς και όλη την ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής και Βελτιστοποίησης για τις πολύτιμες υποδείξεις τους σε διάφορους τομείς.

Ελπίζω αυτή η εργασία να αποτελέσει την αφετηρία της περαιτέρω ενασχόλησής μου στον άκρως ενδιαφέρον και ταχέως εξελισσόμενο τομέα της υπολογιστικής μηχανικής και της βελτιστοποίησης.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή	1
1.1 Σκοπός της εργασίας	1
1.2 Δομή της εργασίας	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Θεωρία Πεπερασμένων Στοιχείων	3
2.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	3
2.2 Διάφορα χρήσιμα είδη Πεπερασμένων Στοιχείων	8
2.2.1 Πεπερασμένο Στοιχείο Δοκού (Beam Element)	8
2.2.2 Στοιχεία Πλακών (Plate Elements)	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μοντελοποίηση πτέρυγας και αποτελέσματα επίλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων	46
3.1 Μοντελοποίηση της πτέρυγας	46
3.1.1 Είδη πτερύγων	46
3.1.2 Τα μέρη της πτέρυγας	47
3.1.3 Μοντελοποίηση της πτέρυγας κατά τη δομική ανάλυση	50
3.2 Περιγραφή κωδίκων πεπερασμένων στοιχείων	53
3.2.1 Πεπερασμένο στοιχείο τύπου δοκού	55
3.2.2 Πεπερασμένο στοιχείο τύπου πλάκας	59
3.3 Παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων	62
3.3.1 Στοιχεία δοκού	63
3.3.2 Ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία	66
3.3.3 Ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία	67
3.3.4 Επίλυση με το λογισμικό Solidworks	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Περιγραφή του επιλύτη Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής	74
4.1 Δομή κωδίκων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και χρησιμοποιούμενες μέθοδοι	74
4.2 Ο επιλύτης 3D εξισώσεων Euler f3d	74
4.2.1 Περιγραφή του κώδικα f3d	74
4.2.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα από την επίλυση ροής γύρω από πτέρυγα	76
4.2.3 Περιγραφή Εξισώσεων Euler	78
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης	82
5.1 Θεωρία αεροελαστικότητας και αεροελαστικής σύζευξης	82
5.1.1 Αεροελαστικότητα	82
5.1.2 Μέθοδοι αεροελαστικής σύζευξης	86

5.1.2.1	Προσεγγίσεις Σύζευξης.....	86
5.2	Κώδικας Αεροελαστικής ανάλυσης.....	94
5.3	Παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων επίλυσης διάφορων περιπτώσεων με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης	96
5.3.1	Επίλυση με κώδικα δομικής ανάλυσης στοιχείου πλάκας	97
5.3.2	Επίλυση με κώδικα δομικής ανάλυσης στοιχείου δοκού	121
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:	Βελτιστοποίηση κατασκευών με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου.....	124
6.1	Εισαγωγή	124
6.1.1	Γενικά.....	124
6.1.2	Η διακριτή συζυγής μέθοδος	124
6.1.3	Περιγραφή των εξισώσεων του κεφαλαίου	126
6.1.4	Περιγραφή του κώδικα δομικής ανάλυσης	127
6.2	Αποτελέσματα επίλυσης.....	127
6.2.1	Αποτελέσματα χρήσης της διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας.....	127
6.2.2	Αποτελέσματα επίλυσης με πεπερασμένες διαφορές	138
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7:	Εφαρμογή αεροελαστικής βελτιστοποίησης σε πτέρυγα αεροσκάφους	140
7.1	Γενικά.....	140
7.2	Περιγραφή διαδικασίας	141
7.3	Αποτελέσματα επίλυσης περίπτωσης 1.....	144
7.4	Προσθήκη όρων από την αεροδυναμική επίλυση στο αεροελαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης	150
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8:	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	153

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αρχικά η ανάπτυξη ενός κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης με χρήση ξεχωριστών επιλυτών για τη δομική και την αεροδυναμική ανάλυση, ο οποίος θα επιλύει το πρόβλημα μιας πτέρυγας που δέχεται αεροδυναμικές φορτίσεις (στατική αεροελαστικότητα). Θα διερευνηθεί τόσο ο τρόπος ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ των δύο επιλυτών όσο και η χρήση κατάλληλου πλέγματος από το δομικό επιλύτη ο οποίος θα αναπτυχθεί εξ' ολοκλήρου και θα πιστοποιηθεί στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Τέλος, θα σχολιαστεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων και η ταχύτητα σύγκλισης που επιτυγχάνεται σε κάθε περίπτωση.

Επίσης, στην παρούσα εργασία θα εφαρμοστεί η μέθοδος της απότομης καθόδου με υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου σε πρόβλημα δομικής βελτιστοποίησης για να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα μιας τέτοιας μεθόδου βελτιστοποίησης για δομικά προβλήματα. Στη συνέχεια, θα εφαρμοστεί η ίδια μέθοδος σε ένα αεροελαστικό πρόβλημα, μιας πτέρυγας που δέχεται αεροδυναμικές φορτίσεις ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την εφαρμογή της μεθόδου σε συζευγμένα αεροελαστικά προβλήματα.

1.2 Δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία είναι δομημένη ως εξής:

- Στο **κεφάλαιο 2** γίνεται αρχικά μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και, στη συνέχεια, περιγράφεται αναλυτικά η εφαρμογή της στην περίπτωση του πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού και στην περίπτωση του πεπερασμένου στοιχείου τύπου πλάκας.
- Στο **κεφάλαιο 3** αρχικά παρουσιάζονται ορισμένα θέματα σχετικά με τον τρόπο μοντελοποίησης της πτέρυγας. Στη συνέχεια γίνεται η περιγραφή των κωδίκων πεπερασμένων στοιχείων που αναπτύχθηκαν και σχολιάζονται τα αποτελέσματα που λήφθηκαν από τους κώδικες σε διάφορες περιπτώσεις.
- Στο **κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται ο επιλύτης που θα χρησιμοποιηθεί για το αεροδυναμικό τμήμα της αεροελαστικής ανάλυσης.
- Στο **κεφάλαιο 5** αρχικά γίνεται αναφορά στην αεροελαστικότητα και, στη συνέχεια, παρουσιάζεται το αντικείμενο της αεροελαστικής σύζευξης. Έπειτα περιγράφεται ο κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης που προγραμματίστηκε, παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα που λήφθηκαν σε διάφορες περιπτώσεις.
- Στο **κεφάλαιο 6** γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της διακριτής συζυγούς μεθόδου και η περιγραφή των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που θα αναλυθεί. Έπειτα, παρουσιάζονται διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.
- Στο **κεφάλαιο 7** περιγράφεται η διαδικασία που θα ακολουθηθεί για το πρόβλημα αεροελαστικής βελτιστοποίησης που θα εξεταστεί, σχολιάζονται οι επιμέρους

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

κώδικες που θα χρησιμοποιηθούν και, τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης.

- Στο **κεφάλαιο 8** γίνεται μια ανακεφαλαίωση και διατυπώνονται γενικά συμπεράσματα από όλη την εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Θεωρία Πεπερασμένων Στοιχείων

2.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Για τη δομική ανάλυση των κατασκευών που θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία θα εφαρμοστεί η πλέον διαδεδομένη και χρησιμοποιούμενη μέθοδος, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Elements-FE). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν συνοπτικά κάποια βασικά στοιχεία της μεθόδου. Περισσότερες λεπτομέρειες για την εφαρμογή της μεθόδου σε συγκεκριμένες περιπτώσεις αλλά και για την αποδοτικότητά της θα παρουσιαστούν στις επόμενες ενότητες.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων φυσικής και εφαρμοσμένων επιστημών όπως η μηχανική. Πέραν της εφαρμογής της μεθόδου στη δομική ανάλυση, η μέθοδος μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί και για θερμική ανάλυση, ανάλυση μεταφοράς μάζας, προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού ή και ρευστοδυναμικής (Logan, 2005).

Για προβλήματα που περιλαμβάνουν πολύπλοκες γεωμετρίες, φορτίσεις και ιδιότητες υλικού είναι γενικά δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί αναλυτική μαθηματική λύση. Οι αναλυτικές λύσεις είναι αυτές που λαμβάνονται από μια μαθηματική έκφραση που δίνει τις τιμές των επιθυμητών αγνώστων ποσοτήτων σε κάθε τοποθεσία ενός σώματος και ισχύει σε κάθε σημείο του σώματος. Αυτές οι αναλυτικές λύσεις γενικά απαιτούν την επίλυση μιας συνήθους (σ.δ.ε) ή μερικής διαφορικής εξίσωσης (μ.δ.ε) η οποία στην περίπτωση πολύπλοκων γεωμετριών, φορτίσεων και ιδιοτήτων υλικού δεν είναι συνήθως εφικτή. Έτσι χρειάζεται να βασιστεί η επίλυση σε αριθμητικές μεθόδους όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για αποδεκτές λύσεις. Η διατύπωση του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία οδηγεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων αντί για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτές οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων σε διακριτά σημεία στο συνεχές μέσο. Η διαδικασία της μοντελοποίησης ενός σώματος με χωρισμό του σε ένα ισοδύναμο σύστημα μικρότερων σωμάτων ή ενοτήτων (πεπερασμένα στοιχεία) διασυνδεδεμένων σε κοινά σημεία (κομβικά σημεία ή κόμβους) ή και σε συνοριακές γραμμές και επιφάνειες, λέγεται χωρική διακριτοποίηση. Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αντί να λυθεί συνολικά το πρόβλημα για ολόκληρο το σώμα, διατυπώνονται οι εξισώσεις για κάθε πεπερασμένο στοιχείο και συνδυάζονται για να ληφθεί ένα σύστημα εξισώσεων για ολόκληρο το σώμα (Logan, 2005).

Η ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ξεκίνησε τη δεκαετία του 1940 στο πεδίο της δομικής μηχανικής από τους Hrennikoff(1941) και McHenry(1943) που μελέτησαν γραμμικά μονοδιάστατα στοιχεία (ράβδους και δοκούς). Στη συνέχεια, ο Courant εισήγαγε κάποιες βασικές έννοιες όπως τις συναρτήσεις μορφής και ο Levy ανέπτυξε αρχικά τη μέθοδο δύναμης (flexibility ή force method) και αργότερα την εναλλακτική μέθοδο μετατόπισης ή δυσκαμψίας (displacement ή stiffness method) θεωρώντας την κατάλληλη

για μελέτη αεροναυπηγικών κατασκευών. Το 1954, οι Argyris και Kelsey ανέπτυξαν μεθόδους μητρικής δομικής ανάλυσης βασισμένες σε ενεργειακές μεθόδους. Το 1956 ο Turner χρησιμοποίησε για πρώτη φορά διδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία και στη συνέχεια, καθώς άρχιζαν να αναπτύσσονται οι πρώτοι ισχυροί ηλεκτρονικοί υπολογιστές ο Turner μελέτησε περαιτέρω τη χρήση μητρώων στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία (Logan, 2005).

Ο όρος «πεπερασμένο στοιχείο» αποδίδεται στον Clough, ο οποίος το 1960 μελέτησε τα πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης. Ο Melosh εισήγαγε για πρώτη φορά το επίπεδο παραλληλόγραμμο στοιχείο πλάκας το 1961 (plate bending element) και οι Grafton και Strome τα στοιχεία κελύφους το 1963. Η επέκταση της μεθόδου σε τριδιάστατα προβλήματα(3D) έγινε από τον Martin το 1961 και ακολούθησαν οι Gallagher και Melosh. Επίσης, με τα 3D πεπερασμένα στοιχεία ασχολήθηκαν την ίδια εποχή οι Argyris, Clough, Rashid και Wilson (Logan, 2005).

Ο Turner επέκτεινε για πρώτη φορά τη μέθοδο πέραν των προβλημάτων μικρών παραμορφώσεων-μετατοπίσεων, ελαστικής συμπεριφοράς και στατικών φορτίων, μελετώντας παράλληλα και τη θερμική συμπεριφορά των σωμάτων. Ο Gallagher εισήγαγε τις μη-γραμμικές συμπεριφορές των υλικών και οι Gallagher και Radlog εισήγαγαν τα προβλήματα πτύχωσης (buckling) Ο Zienkiewicz το 1968 επέκτεινε τη μέθοδο για βισκοελαστικά προβλήματα.

Στη συνέχεια, η μέθοδος επεκτάθηκε στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών, σε μεταβατικά φαινόμενα, σε φαινόμενα ηλεκτρομαγνητισμού αλλά και εμβιομηχανικής.

Μέχρι σήμερα έχει συντελεστεί πολύ σημαντική πρόοδος στην εφαρμογή της μεθόδου για δύσκολα προβλήματα εφαρμογών της μηχανικής.

Στα στατικά δομικά προβλήματα, το πρόβλημα γράφεται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$[K]\vec{\Phi} = \vec{P} \quad (2.1)$$

όπου K είναι το μητρώο δυσκαμψίας, Φ το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων και P το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων. Το μητρώο δυσκαμψίας το οποίο αντιστοιχεί στην σταθερά ελατηρίου k (από τον νόμο του Hooke) υπολογίζεται, προσεγγιστικά, με τη θεώρηση ενεργειακών προτάσεων. Συγκεκριμένα, διατυπώνεται με την **αρχή των δυνατών έργων**, ή με την αρχή της **στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας** σε συνδυασμό με τη μέθοδο **Rayleigh-Ritz** (Παπαδρακάκης, 2001):

Η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων διατυπώνεται ως εξής: «Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίξεώς του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων» (Παπαδρακάκης, 2001). Στη συνέχεια, θα περιγραφούν κάποια βασικά στοιχεία των άλλων δύο μεθόδων (Παπαδρακάκης, 2001):

Οι μέθοδοι αυτές, με βάση τη μαθηματική τους διατύπωση, ονομάζονται και **μέθοδοι των μεταβολών** (variational methods). Το πρώτο θεώρημα του Castigliano είναι συναφές προς

τις δυο αυτές ενεργειακές θεωρήσεις και έχει και αυτό χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μητρώων δυσκαμψίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δυο ενεργειακές θεωρήσεις της αρχής των δυνατών έργων και της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα. Αποτελεί θέμα επιλογής, με μικρές διαφορές μεταξύ τους, ποια από τις δυο μεθόδους θα χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση των χαρακτηριστικών εξισώσεων του φορέα.

- Για την ανάλυση των φορέων με τη μέθοδο **Rayleigh-Ritz** απαιτείται η ύπαρξη μιας ολοκληρωματικής σχέσης, η οποία εμμέσως πρέπει να εμπεριέχει τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά του φορέα. Στη δομική μηχανική, οι ολοκληρωματικές αυτές εξισώσεις δεν είναι άλλες από την έκφραση της *δυνατής ενέργειας παραμορφώσεως* και την έκφραση της *συνολικής δυναμικής ενέργειας* οι οποίες προκύπτουν από την αρχή των δυνατών έργων και την αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας, αντίστοιχα.

Οι χαρακτηριστικές διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος ορίζουν το πρόβλημα στην λεγόμενη **ισχυρή** του μορφή. Αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις ικανοποιούνται σε κάθε υλικό σημείο του σώματος. Μια ολοκληρωματική διατύπωση των χαρακτηριστικών εξισώσεων ορίζει το πρόβλημα στην **ασθενή** του μορφή. Αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις ικανοποιούνται σε μια περιοχή του φορέα με μια μέση τιμή. Η μέθοδος Rayleigh-Ritz μπορεί να εφαρμοστεί με την κλασική της μορφή ή με τη μορφή των πεπερασμένων στοιχείων.

- Η μέθοδος των **σταθμικών υπολοίπων** (weighted residual method) έχει επίσης χρησιμοποιηθεί, ως εναλλακτική των μεθόδων των μεταβολών, διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος των σταθμικών υπολοίπων, η **μέθοδος Galerkin**, επιχειρεί μια προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων με τη θεώρηση δοκιμαστικών συναρτήσεων για τις χαρακτηριστικές μετατοπίσεις του προβλήματος. Επιχειρείται δηλαδή η ικανοποίηση των διαφορικών εξισώσεων με άμεσο τρόπο, σε αντίθεση με τη θεώρηση των μεθόδων των μεταβολών στις οποίες η ικανοποίηση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται έμμεσα μέσω της ολοκληρωματικής της διατύπωσης. Αυτός ο τρόπος ικανοποίησης των διαφορικών εξισώσεων από τη μέθοδο Galerkin, αν και αποτελεί πλεονέκτημα, δυσχεραίνει τη διατύπωση της μεθόδου. Γι' αυτό το λόγο, σε προβλήματα δομικής μηχανικής έχει επικρατήσει η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με τη θεώρηση Rayleigh-Ritz λόγω της ευχερέστερης διατύπωσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο μέθοδοι καταλήγουν σε ταυτόσημα αποτελέσματα.

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπως προαναφέρθηκε, το συνεχές μέσο αναπαρίσταται ως ένα σύνολο υποδιαίρέσεων που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Εφόσον η πραγματική διακύμανση της μεταβλητής του πεδίου που εξετάζεται (π.χ. μετατόπιση, τάση, θερμοκρασία, πίεση ή ταχύτητα) μέσα στο συνεχές μέσο δεν είναι γνωστή, θεωρείται ότι η διακύμανση των μεταβλητών του πεδίου μέσα στο πεπερασμένο στοιχείο μπορεί να προσεγγιστεί από μια απλή συνάρτηση, Αυτές οι συναρτήσεις προσέγγισης, γνωστές και ως μοντέλα παρεμβολής, ορίζονται σε σχέση με τις τιμές των

μεταβλητών πεδίου στους κόμβους. Όταν γραφούν οι εξισώσεις πεδίου για ολόκληρο το συνεχές μέσο οι νέοι άγνωστοι θα είναι οι κομβικές τιμές της μεταβλητής πεδίου. Λύνοντας τις εξισώσεις πεδίου που βρίσκονται συνήθως σε μητρική μορφή θα υπολογιστούν οι κομβικές τιμές της μεταβλητής πεδίου. Όταν γίνουν γνωστές αυτές οι τιμές τότε μέσω των συναρτήσεων προσέγγισης, έχει οριστεί η μεταβλητή πεδίου στο σύνολο των στοιχείων (S.Rao, 2004)

Η επίλυση ενός γενικού προβλήματος συνεχούς μέσου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πάντα ακολουθεί μια βηματική διαδικασία. Αναφερόμενοι σε στατικά δομικά προβλήματα, η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί ως εξής (S.Rao, 2004), (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005), (Παπαδρακάκης, 2001), (Chandrupatla & Belegundu, 2005), (Kattan):

Βήμα 1: Διακριτοποίηση της κατασκευής

Το πρώτο βήμα στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι να διαιρεθεί η δομή (στην περιοχή επίλυσης) σε υποδιαίρεσεις (ή στοιχεία). Έτσι, η κατασκευή πρέπει να μοντελοποιηθεί με κατάλληλα πεπερασμένα στοιχεία. Ο αριθμός, ο τύπος, το μέγεθος και η τοποθέτηση των πεπερασμένων στοιχείων είναι επιλογή που κάνει αυτός που εφαρμόζει τη μέθοδο για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Για ήδη διακριτοποιημένα συστήματα, όπως είναι λόγου χάρη τα δικτύωμα και τα πλαίσια, το σύστημα δεν χρειάζεται κάτι άλλο και αυτό το βήμα ουσιαστικά παραλείπεται. Ωστόσο, για συνεχή συστήματα, όπως είναι οι δίσκοι, οι πλάκες και τα κελύφη, το βήμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό.

Για κατασκευές που δεν είναι απλές όπως τα ραβδωτά στοιχεία (δικτύωμα, πλαίσιο) η κατασκευή δεν μπορεί να αναλυθεί μονοσήμαντα σ' έναν αριθμό στοιχείων. Ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζεται, είναι σημαντική η επιλογή του *τύπου* του πεπερασμένου στοιχείου που θα χρησιμοποιηθεί.

Βήμα 2: Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης παρεμβολής (ή μοντέλου μετατοπίσεων)

Εφόσον η μετατόπιση μιας περίπλοκης κατασκευής κάτω από κάποιες συνθήκες φόρτισης δεν μπορεί να προβλεφθεί αναλυτικά, υποτίθεται κάποια κατάλληλη λύση (συνάρτηση) μέσα σ' ένα στοιχείο για να προσεγγιστεί η άγνωστη λύση. Η λύση που υποτίθεται πρέπει να είναι απλή υπολογιστικά αλλά πρέπει να ικανοποιεί κάποιες απαιτήσεις σύγκλισης. Γενικά, η λύση ή το μοντέλο παρεμβολής έχει τη μορφή πολυωνύμου.

Όσο πιο μικρό είναι το μέγεθος του στοιχείου, τόσο πιο μικρό είναι και το σφάλμα που γίνεται με αυτήν την παραδοχή (κάτι που αυξάνει παράλληλα το υπολογιστικό κόστος). Υπάρχει η δυνατότητα να μπου κάποιες κανόνες στην επιλογή της συνάρτησης παρεμβολής ώστε η μέθοδος να συγκλίνει.

Βήμα 3: Παραγωγή των μητρών δυσκαμψίας των στοιχείων και των διανυσμάτων φόρτισης

Από το μοντέλο μετατόπισης που υποτέθηκε, το μητρώο δυσκαμψίας K και το διάνυσμα φόρτισης P του στοιχείου παράγονται είτε από εξισώσεις ισορροπίας είτε από εφαρμογές της αρχής των μεταβολών.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση παρεμβολής μπορούν να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Θεωρείται ένα μεμονωμένο στοιχείο της κατασκευής και θεωρούνται ως εξωτερικά φορτία οι τάσεις που προκαλούνται στο στοιχείο από το υπόλοιπο τμήμα της κατασκευής. Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων στο στοιχείο προσδιορίζει κάποιες ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις και το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.

Βήμα 4: Συγκέντρωση των εξισώσεων των στοιχείων για να ληφθούν οι ολικές εξισώσεις ισορροπίας.

Εφόσον η δομή αποτελείται από αρκετά πεπερασμένα στοιχεία, τα μεμονωμένα μητρώα δυσκαμψίας των στοιχείων και τα μητρώα φορτίσεως πρέπει να συγκεντρωθούν με κατάλληλο τρόπο και οι ολικές εξισώσεις ισορροπίας να διατυπωθούν ως εξής:

$$[K]\vec{\Phi} = \vec{P} \quad (2.2)$$

όπου $[K]$ είναι το ολικό μητρώο δυσκαμψίας, $\vec{\Phi}$ είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και \vec{P} είναι το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων για όλη τη κατασκευή.

Συνήθως, το μητρώο δυσκαμψίας που υπολογίζεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι συμμετρικό, θετικά ορισμένο και έχει τη μορφή λωρίδας διαγωνίων.

Βήμα 5: Επίλυση ως προς τις άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις

Οι ολικές εξισώσεις ισορροπίας πρέπει να μετασχηματιστούν για να λάβουν υπόψη και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Μετά την ενσωμάτωση των οριακών συνθηκών, οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να εκφραστούν με μορφή παρόμοια της προηγούμενης σχέσης. Το νέο σύστημα προκύπτει ουσιαστικά είτε με μερισμό του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας (απαλοιφή γραμμών και στηλών που αντιστοιχούν στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας) είτε μετασχηματίζοντας κατάλληλα τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχούν στις οριακές συνθήκες (τα οποία δεν απαλείφονται σε αυτή την περίπτωση από το μητρώο δυσκαμψίας).

Για γραμμικά προβλήματα, η λύση μπορεί να είναι αρκετά εύκολη. Ωστόσο, για μη-γραμμικά προβλήματα η λύση πρέπει να λαμβάνεται σε μια διαδοχή βημάτων με χρήση κάποιας επαναληπτικής μεθόδου (και σε κάθε βήμα να υπολογίζεται ξανά το τροποποιημένο μητρώο δυσκαμψίας ή και το διάνυσμα φόρτισης).

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες, στα δομικά προβλήματα αυτές συνήθως προκύπτουν από προσεγγίσεις που γίνονται για να παρασταθεί μια διασύνδεση υποστήριξης-κατασκευής. Πολλές φορές δημιουργούνται ερωτήματα κατά πόσον τα συνδεδεμένα με υποστηρίγματα σημεία μιας κατασκευής είναι ολικά στερεά ή μερικά στερεά και εάν κάθε σημείο στη διατομή του σταθερού άκρου έχει οριστεί με τις ίδιες οριακές συνθήκες. Ο Saint Venant θεώρησε την επίδραση των διαφορετικών προσεγγίσεων στη λύση του συνολικού προβλήματος. Η **αρχή του Saint-Venant** ορίζει ότι εφόσον οι διάφορες προσεγγίσεις είναι στατικά ισοδύναμες, οι λύσεις θα είναι έγκυρες, υπό την προϋπόθεση ότι εστιάζουμε σε περιοχές αρκετά μακριά από την περιοχή στήριξης. Δηλαδή οι λύσεις μπορεί να διαφέρουν

αρκετά μόνο εντός περιοχής που γειτνιάζει άμεσα με τη στήριξη (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Βήμα 6: Υπολογισμός των τάσεων και παραμορφώσεων στα στοιχεία

Το βήμα αυτό ανήκει στη φάση της μετεπεξεργασίας (post-processing) όπως ονομάζεται στη βιβλιογραφία και στο σύνολο των εμπορικών κωδίκων ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία. Από τις γνωστές κομβικές μετατοπίσεις, μπορούν να υπολογιστούν οι τάσεις και παραμορφώσεις κάθε στοιχείου χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες σχέσεις. Επίσης, υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού των αντιδράσεων στις στηρίξεις. Τέλος, για κάποια είδη πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να υπολογιστούν τα διαγράμματα M,Q,N τα οποία δίνουν ουσιαστικές πληροφορίες για την εντατική κατάσταση του φορέα (π.χ. για μια άτρακτο σε κάποια μηχανολογική κατασκευή).

Αξίζει να τονιστεί ότι με το μοντέλο των μετατοπίσεων που επιλέγεται εξασφαλίζεται η συνέχεια των μετατοπίσεων από στοιχείο σε στοιχείο. Δεν εξασφαλίζεται όμως η συνέχεια των τάσεων. Άρα οι τάσεις που προκύπτουν από τις παραμορφώσεις (δηλαδή από την παραγωγή των μετατοπίσεων) χρειάζονται κάποια **εξομάλυνση** προκειμένου να προσδιορισθεί ένα ομαλό εντατικό πεδίο στην κατασκευή (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Όσον αφορά τη σύγκλιση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, έχουν διατυπωθεί κάποια βασικά κριτήρια σύγκλισης της μεθόδου για σύμμορφα και ασύμμορφα στοιχεία. Μια προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία καλείται **σύμμορφη**(conforming) όταν οι μετατοπίσεις και οι διαδοχικές παράγωγοί τους μέχρι την τάξη (p-1) είναι συνεχείς κατά μήκος της κοινής πλευράς δύο στοιχείων. Όταν δεν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, η προσέγγιση λέγεται **ασύμμορφη** (non-conform) (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Στην περίπτωση των ασύμμορφων στοιχείων, ο έλεγχος που χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η καταλληλότητα των ασύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων και, επομένως, η προσέγγιση που μπορεί να επιτευχθεί μ' αυτά καλείται έλεγχος συρραφής (patch test).

2.2 Είδη Πεπερασμένων Στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν

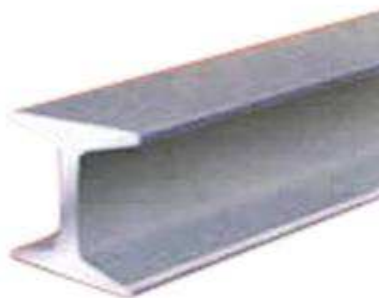
Στην ενότητα 2.2 θα παρουσιαστούν οι δύο τύποι πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται στους κώδικες δομικής ανάλυσης αυτής της εργασίας, ήτοι το πεπερασμένο στοιχείο δοκού και το πεπερασμένο στοιχείο πλάκας.

2.2.1 Πεπερασμένο Στοιχείο Δοκού (Beam Element)

2.2.1.1 Εισαγωγή

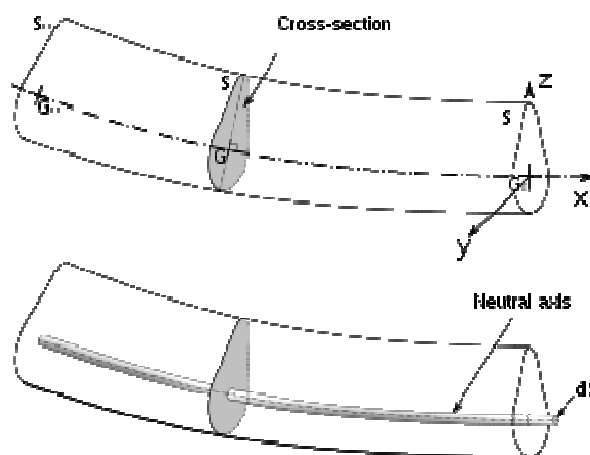
Οι δοκοί είναι το πιο συνηθισμένο δομικό στοιχείο, ειδικά στα πεδία του Πολιτικού Μηχανικού και του Μηχανολόγου Μηχανικού. Παραδείγματα δοκών είναι τα επιμήκη οριζόντια μέλη που χρησιμοποιούνται σε κτίρια και γέφυρες (όπως π.χ. η δοκός I που απεικονίζεται στο **Σχήμα 2.1**) και οι άξονες που στηρίζονται σε έδρανα (ρουλεμάν) (Chandrupatla & Belegundu, 2005). Η δοκός είναι ένα δομικό στοιχείο που μοιάζει με ράβδο και του οποίου η βασική χρησιμότητα είναι να υποστηρίζει τα κατακόρυφα φορτία (όταν αναφερόμαστε σε οριζόντια δοκό) και να τα οδηγεί στις στηρίξεις. Τα φορτία που

προκαλούν κάμψη έχουν τη σημαντικότερη επίδραση στη δοκό σε σχέση με την επίδραση των στρεπτικών ή αξονικών φορτίων (Felippa, 2004).



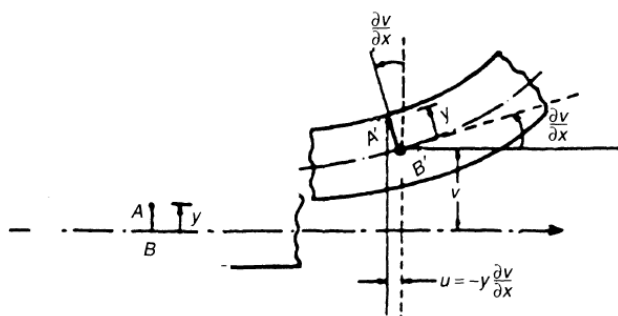
Σχήμα 2.1: 3D απεικόνιση μιας δοκού με διατομή I (ή «διπλού T»).

Το στοιχείο αυτό έχει ομοιότητα με μια ράβδο διότι μία από τις διαστάσεις του είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Αυτή η διάσταση ονομάζεται διαμήκης διάσταση ή άξονας της δοκού. Οι τομές των επιπέδων που είναι κάθετα στη διαμήκη διεύθυνση με το στοιχείο δοκού ονομάζονται διατομές (cross sections-απεικονίζονται χαρακτηριστικά στο **Σχήμα 2.2**). Το διάμηκες επίπεδο (κατά τον άξονα x) είναι αυτό που περιέχει τον άξονα της δοκού (Fielding, 1999).



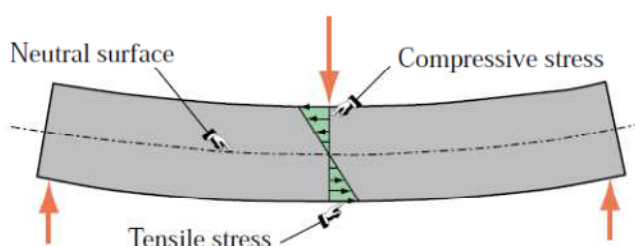
Σχήμα 2.2: Διατομή της δοκού και ουδέτερος άξονας (WIK).

Από μαθηματικής άποψης, η βασική διαφορά των πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού σε σχέση με άλλα πεπερασμένα στοιχεία, όπως τα στοιχεία ράβδου, είναι η αυξημένη τάξη συνέχειας που απαιτείται για τις συναρτήσεις παρεμβολής των κατακόρυφων μετατοπίσεων. Αυτές οι συναρτήσεις απαιτείται να είναι όχι μόνο συνεχείς, αλλά να έχουν και συνέχεια πρώτης παραγώγου. Για να ικανοποιηθεί αυτή η προϋπόθεση, τόσο οι μετατοπίσεις όσο και οι κλίσεις (slopes-βλ. **Σχήμα 2.3**) πρέπει να έχουν ίδιες τιμές στους κοινούς κόμβους δύο πεπερασμένων στοιχείων. Οι κλίσεις αντιμετωπίζονται ως περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας στις υποθέσεις μικρής μετατόπισης-μικρής παραμόρφωσης (small displacement-small strain) (Felippa, 2004).



Σχήμα 2.3: Δοκός σε κάμψη, απεικονίζεται και η κλίση $\frac{dw}{dx}$ (S.Rao, 2004).

Η δοκός υποστηρίζει κατακόρυφα φορτία κυρίως μέσω της κάμψης. Η κάμψη παράγει θλιπτικές τάσεις στη μία πλευρά της δοκού και εφελκυστικές στην άλλη.

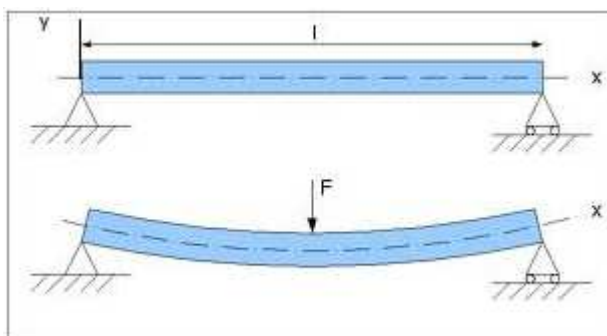


Σχήμα 2.4: Τάσεις σε δοκό (Felippa, 2004).

Οι δύο περιοχές διαχωρίζονται από μια ουδέτερη επιφάνεια μηδενικών τάσεων (normal surface, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2.4). Ο συνδυασμός εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων παράγει μια εσωτερική καμπτική ροπή. Αυτή η ροπή είναι ο κύριος μηχανισμός που μεταφέρει φορτία στις στηρίξεις.

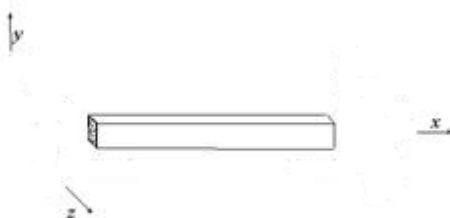
2.2.1.2 Θεωρία των δοκών (Euler-Bernoulli)

Μια δοκός είναι γενικά ένα ραβδοειδές μέλος που είναι σχεδιασμένο να αντέχει σε συνδυασμό φορτίσεων όπως διαξονική κάμψη, διαμήκη διάτμηση, αξονικό εφελκυσμό ή θλίψη και πιθανότατα στρέψη. Εάν η εξωτερική αξονική δύναμη είναι θλιπτική η δοκός πρέπει, επίσης, να είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε να αντέχει στην πτύχωση (buckling). Εάν η δοκός υπόκειται κυρίως σε καμπτικές και αξονικές δυνάμεις, ονομάζεται δοκός-στήλη (beam-column). Εάν υπόκειται κυρίως σε καμπτικές δυνάμεις ονομάζεται απλά δοκός (μια απλή περίπτωση απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5). Η δοκός αποκαλείται οριζόντια ή ευθύγραμμη (straight), εάν ο διαμήκης άξονάς της είναι ευθύγραμμος και πρισματική εάν η διατομή της είναι σταθερή (Felippa, 2004).



Σχήμα 2.5: Δοκός που υπόκειται σε συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο F (WIV).

Μια χωρική δοκός (όπως αυτή που απεικονίζεται στο **Σχήμα 2.6**) υποστηρίζει ορθά φορτία που μπορούν να ασκηθούν σε διάφορες διευθύνσεις σε μια διατομή. Μια επίπεδη δοκός υπόκειται κυρίως σε κατακόρυφη φόρτιση σε ένα διάμηκες επίπεδο. Στην εργασία αυτή, θα γίνει αναφορά μόνο σε επίπεδες δοκούς.



Σχήμα 2.6: Δοκός στον χώρο (COE).

Έχουν κατασκευαστεί μονοδιάστατα (1Δ) μαθηματικά μοντέλα δοκών βασισμένα στη θεωρία των δοκών. Επειδή οι δοκοί είναι στην πραγματικότητα 3Δ σώματα, όλα τα μοντέλα αναγκαστικά περιλαμβάνουν κάποιου είδους προσέγγιση του φυσικού προβλήματος. Τα απλούστερα και πιο γνωστά μοντέλα για ευθύγραμμες πρισματικές δοκούς βασίζονται στη θεωρία της δοκού Bernoulli-Euler (Bernoulli-Euler beam theory, επίσης καλούμενη και κλασική θεωρία δοκών ή engineering beam theory) και στη θεωρία της δοκού Timoshenko. Η θεωρία της δοκού Bernoulli-Euler, όπως αυτή αναφέρεται στην επιστήμη των Υλικών, θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

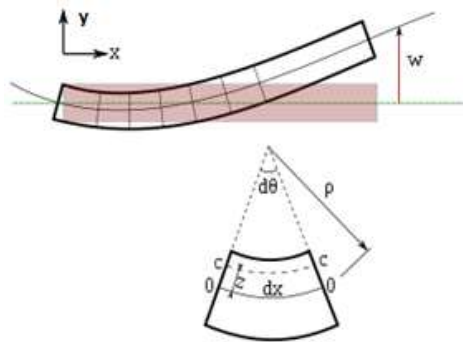
Η ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων δοκού μπορεί να βασιστεί και στα δύο μοντέλα. Η χρήση της θεωρίας Bernoulli-Euler οδηγεί στα αποκαλούμενα Ερμιτιανά (Hermitian) στοιχεία δοκού, που είναι γνωστά ως στοιχεία C^1 . Αυτό το μοντέλο αγνοεί την επίδραση των διατμητικών παραμορφώσεων στην εσωτερική ενέργεια. Τα στοιχεία που βασίζονται στη θεωρία του Timoshenko, γνωστά ως στοιχεία C^0 ενσωματώνουν μια διόρθωση πρώτης τάξης για την επίδραση της διάτμησης. Το μοντέλο αυτό δίνει επιπρόσθετη βαρύτητα στη δυναμική και τις ταλαντώσεις (Felippa, 2004), (WIK).

Η θεωρία Bernoulli-Euler ή κλασική θεωρία δοκών (η οποία θα ακολουθηθεί σε αυτήν την εργασία) για επίπεδες δοκούς βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις (Felippa, 2004):

- **Επίπεδη συμμετρία:** Ο διαμήκης άξονας είναι ευθύγραμμος και η διατομή της ράβδου έχει ένα διάμηκες επίπεδο συμμετρίας. Το αποτέλεσμα των κατακόρυφων φορτίων

που ασκούνται σε κάθε διατομή βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο. Οι συνθήκες στήριξης είναι επίσης συμμετρικές γύρω από αυτό το επίπεδο.

- Αποκλίσεις της διατομής: Η διατομή είναι είτε σταθερή είτε μεταβάλλεται ομαλά.
- Καθετότητα: Οι επίπεδες τομές που είναι αρχικά κάθετες στο διαμήκη άξονα της δοκού παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον, παραμορφωμένο λόγω της κάμψης, διαμήκη άξονα (βλ. **Σχήμα 2.7**).
- Ενέργεια παραμόρφωσης: Η εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης του μέλους σχετίζεται μόνο με τις καμπτικές παραμορφώσεις. Όλες οι άλλες συνεισφορές, από διαμήκεις διατμητικές και αξονικές δυνάμεις αγνοούνται.
- Γραμμικότητα: Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις, περιστροφές και παραμορφώσεις θεωρούνται τόσο μικρές ώστε να ισχύουν οι θεωρήσεις των απειροστών παραμορφώσεων.
- Μοντέλο υλικού: Το υλικό θεωρείται ότι είναι ελαστικό και ισότροπο. Δεν αποκλείονται όμως και ετερογενείς δοκοί, κατασκευασμένες από διάφορα ισότροπα υλικά, όπως σύνθετα υλικά (χωρίς πολλές στρώσεις).



Σχήμα 2.7: Διατήρηση της καθετότητας των διατομών σε σχέση με τον άξονα της δοκού (WIK).

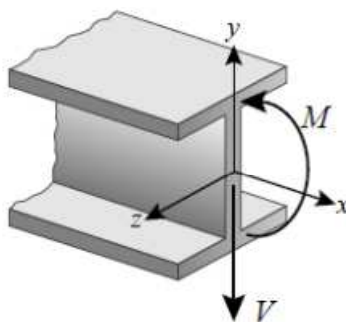
Όταν η δοκός υπόκειται σε εγκάρσια φόρτιση η άνω επιφάνεια βραχύνεται ενώ η κάτω επιμηκύνεται. Ωστόσο υπάρχει μια ουδέτερη επιφάνεια μεταξύ της πάνω και της κάτω επιφάνειας της δοκού που δεν υπόκειται σε αξονική παραμόρφωση. Η τομή αυτής της επιφάνειας με κάθε διατομή ορίζει τον ουδέτερο άξονα αυτής της διατομής.

Οι καρτεσιανοί άξονες για την ανάλυση επίπεδων δοκών επιλέγονται ως εξής: Ο άξονας x βρίσκεται κατά μήκος του διαμήκου άξονα της δοκού, στο ύψος του ουδέτερου άξονα. Ο άξονας y βρίσκεται στο επίπεδο συμμετρίας και δείχνει προς τα πάνω. Ο άξονας z δείχνει κατά μήκος του ουδέτερου άξονα, σχηματίζοντας ένα δεξιόστροφο σύστημα με τα x και y (βλ. **Σχήμα 2.8**). Η αρχή των αξόνων τοποθετείται στην ακραία αριστερή διατομή. Το ολικό μήκος της δοκού συμβολίζεται L .

Η σύμβαση προσήμου για τις δοκούς είναι (Logan, 2005):

- 1.) Οι ροπές είναι θετικές στην αντι-ωρολογιακή κατεύθυνση.
- 2.) Οι περιστροφές είναι θετικές στην αντι-ωρολογιακή κατεύθυνση επίσης.
- 3.) Οι δυνάμεις είναι θετικές στην κατεύθυνση των θετικών ($+y$) του άξονα y .

4.) Οι μετατοπίσεις είναι θετικές στη θετική κατεύθυνση του άξονα y .



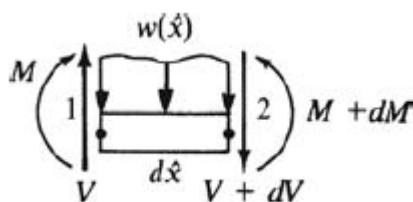
Σχήμα 2.8: Σύμβαση προσήμου δύναμης (V) και ροπής (M) στη δοκό (η φορά που έχει η δύναμη V και η ροπή M είναι η θετική φορά) (Felippa, 2004).

Η παραδοχή ότι παραμένουν επίπεδες οι διατομές μετά την άσκηση του φορτίου αληθεύει στις περιπτώσεις άσκησης καθαρά ενός ζεύγους δυνάμεων ή μιας σταθερής ροπής στη δοκό. Ωστόσο, είναι μια χρήσιμη θεώρηση που οδηγεί σε εξισώσεις που περιγράφουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά της δοκού στις περισσότερες περιπτώσεις.

Η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής προκύπτει ως εξής. Θεωρείται, για παράδειγμα, μια οριζόντια δοκός με καταναμημένο φορτίο $w(\tilde{x})$ (δύναμη/μήκος). Αν θεωρηθεί η ισορροπία δυνάμεων(V) και ροπών(M) σε ένα διαφορικό κομμάτι της δοκού (βλ. **Σχήμα 2.9**), λαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας (Logan, 2005):

$$\Sigma F_y = 0: V - (V + dV) - w(\tilde{x})d\tilde{x} = 0 \rightarrow -w d\tilde{x} - dV = 0 \text{ ή } w = \frac{dV}{d\tilde{x}} \quad (2.3)$$

$$\Sigma M = 0: -V d\tilde{x} + dM + w(\tilde{x}) d\tilde{x} \left(\frac{d\tilde{x}}{2}\right) = 0 \text{ ή } V = \frac{dM}{d\tilde{x}} \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.9: Δυνάμεις και ροπές σε διαφορικό κομμάτι της δοκού (Logan, 2005).

Η τελική μορφή της εξίσωσης που σχετίζει τη διατμητική δύναμη V με την καμπτική ροπή M προέρχεται από διαίρεση της εξίσωσης στα αριστερά με τον όρο $d\tilde{x}$ και μετά παίρνοντας το όριο της εξίσωσης για $d\tilde{x} \rightarrow 0$. Τότε, ο όρος $w(\tilde{x})$ εξαφανίζεται.

Η καμπυλότητα κ της δοκού σχετίζεται με τη ροπή από τη σχέση: $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ όπου ρ είναι η ακτίνα της παραμορφωμένης καμπύλης. Για μικρές κλίσεις, η καμπυλότητα $\tilde{\varphi} = \frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2}$ δίνεται από τη σχέση $\kappa = \frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2}$ όπου \tilde{v} είναι η συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης στην \tilde{y} κατεύθυνση (άλλες φορές συμβολίζεται και με w -βέλος κάμψης), E είναι το μέτρο

ελαστικότητας και I είναι η ροπή αδράνειας της διατομής γύρω από τον άξονα \tilde{z} (Logan, 2005).

Από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει : $\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2} = \frac{M}{EI}$. Λύνοντας αυτή την εξίσωση ως προς M και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της στις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτει:

$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}(EI \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{x}^2}) = -w(\tilde{x})$. Με σταθερό το EI και θεωρώντας μόνο κομβικές δυνάμεις και ροπές η τελευταία εξίσωση γίνεται: $EI \frac{d^4\tilde{v}}{d\tilde{x}^4} = 0$.

Η κίνηση της δοκού στο επίπεδο (x,y) υπό τη φόρτιση που μπορεί να δεχτεί περιγράφεται από το 2Δ πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix},$$

όπου u και v είναι η αξονική και η κατακόρυφη συνιστώσα αντίστοιχα ενός οποιουδήποτε σημείου της δοκού. Η κίνηση κατά τη διεύθυνση z που οφείλεται κυρίως στις επιδράσεις του λόγου του Poisson δεν έχει κανένα ενδιαφέρον. Η υπόθεση της καθετότητας των διατομών του μοντέλου Bernoulli-Euler μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως (Felippa, 2004):

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -yv' = -y\theta, \quad u(x, y) = v(x) \quad (2.5)$$

όπου η κλίση της καμπύλης παραμόρφωσης συμβολίζεται ως θ . Αυτό είναι αποδεκτό διότι το θ αναπαριστά σύμφωνα με τις κινηματικές παραδοχές του μοντέλου, την περιστροφή μιας διατομής γύρω από τον άξονα z με θετική φορά την αντισωρολογιακή.

Κατανεμημένα φορτία που ασκούνται στη δοκό κατά τη διεύθυνση $+y$ συμβολίζονται με $q(x)$. Συγκεντρωμένα φορτία και ροπές που ασκούνται σε μεμονωμένες διατομές της δοκού μπορούν να παρασταθούν με τη συνάρτηση Dirac και την παράγωγό της. Για παράδειγμα, αν ένα κατακόρυφο σημειακό φορτίο F ασκείται στο $x=a$, συνεισφέρει την ποσότητα $F\delta(x-a)$ στο $q(x)$. Εάν η συγκεντρωμένη ροπή C ασκείται στο $x=b$, συνεισφέρει την ποσότητα $C\delta'(x-b)$ στο $q(x)$, όπου δ' είναι ένα doublet (παράγωγος της συνάρτησης Dirac) που ασκείται στο σημείο $x=b$ (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Οι συνθήκες στήριξης στις δοκούς εμφανίζουν μεγαλύτερη ποικιλία απ' ό,τι σε άλλα μονοδιάστατα στοιχεία. Οι δύο πιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι η αμφιέριστη δοκός (με δύο στηρίξεις στα άκρα της) και η πακτωμένη δοκός(μονόπακτη) ή πρόβολος. Οι δοκοί συνήθως εμφανίζονται ως στοιχεία μεγαλύτερων δομών στις οποίες οι συνθήκες στήριξης (οριακές συνθήκες) είναι πιο σύνθετες (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Το μοντέλο Bernoulli-Euler υποθέτει ότι η εσωτερική ενέργεια της δοκού οφείλεται εξ' ολοκλήρου στις καμπτικές τάσεις και παραμορφώσεις. Η κάμψη παράγει αξονικές τάσεις (ορθές) σ_{xx} οι οποίες θα συμβολίζονται με σ , και αξονικές παραμορφώσεις ϵ_{xx} , οι οποίες συμβολίζονται με ϵ . Οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις μετατοπίσεις με διαφορίση της αξονικής μετατόπισης $u(x)$ (Felippa, 2004):

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y v'' = -y \kappa \quad (2.6)$$

Με κ συμβολίζεται η καμπυλότητα του παραμορφωμένου άξονα της δοκού η οποία με προσέγγιση πρώτης τάξης συμβολίζεται με $\kappa \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v''$. Η καμπτική τάση $\sigma = \sigma_{xx}$ συνδέεται με το ε μέσω του 1Δ νόμου του Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -Ey \kappa \quad (2.7)$$

όπου με E συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας. Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της τάσης στην κλασική θεωρία δοκών είναι η καμπτική ροπή M που ορίζεται ως το ολοκλήρωμα σε μία διατομή (Felippa, 2004):

$$M = -y \sigma dA = E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y^2 dA = EI \kappa \quad (2.8)$$

όπου με I_{zz} συμβολίζεται η ροπή αδράνειας $\int_A y^2 dA$ της κάθε διατομής σε σχέση με τον ουδέτερο άξονα z . Η καμπτική ροπή M θεωρείται θετική εάν θλίβει το πάνω μέρος της (οριζόντιας) δοκού. Αυτή η σύμβαση εξηγεί και το αρνητικό πρόσημο του y στη **σχέση 2.8**. (Felippa, 2004).

2.2.1.3 Θεωρία Timoshenko

Η θεωρία δοκών του Timoshenko λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση και επιδράσεις περιστροφικής αδράνειας ώστε να είναι κατάλληλη να περιγράψει δοκούς μικρού μήκους, δοκούς από σύνθετο υλικό ή δοκούς που υπόκεινται σε υψίσυχη φόρτιση όταν το μήκος κύματος πλησιάζει σε μέγεθος το πάχος της δοκού. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι 4^{ης} τάξης αλλά σε αντίθεση με τη θεωρία Bernoulli-Euler υπάρχει και ένας όρος δεύτερης χωρικής παραγωγού. Λαμβάνοντας υπόψη αυτόν τον επιπρόσθετο μηχανισμό παραμόρφωσης, προκύπτει μια μείωση στη δυσκαμψία της δοκού καθώς προκύπτει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο βέλος κάμψης για στατική φόρτιση και μικρότερες ιδιοσυχνότητες για δεδομένες οριακές συνθήκες. Όταν το μέτρο διάτμησης (G) της δοκού πλησιάζει το άπειρο και αν αγνοηθούν οι επιδράσεις της περιστροφικής αδράνειας, η θεωρία του Timoshenko συγκλίνει στην κλασική θεωρία δοκών (WIK).

Στη θεωρία της στατικής δοκού Timoshenko χωρίς την επίδραση αξονικών φορτίων, οι μετατοπίσεις της δοκού δίνονται από τις σχέσεις (WIK):

$$u_x(x,y,z) = -z\phi(x), u_y(x,y,z) = 0, u_z(x,y) = w(x) \quad (2.9)$$

όπου (x,y,z) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στην δοκό, u_x , u_y , u_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος των μετατοπίσεων στις τρεις διευθύνσεις, ϕ είναι η γωνία περιστροφής της καθέτου στην μέση επιφάνεια της δοκού και w είναι η μετατόπιση της μέσης επιφάνειας στην διεύθυνση z .

Οι διαφορικές εξισώσεις της δοκού περιγράφονται από το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q(x, t) \quad (2.10)$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{\kappa AG} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (2.11)$$

Η θεωρία δοκών του Timoshenko για τη στατική είναι ισοδύναμη με τη θεωρία των Euler-Bernoulli όταν ο τελευταίος όρος της παραπάνω εξίσωσης αμελείται, μια προσέγγιση που είναι σωστή όταν ισχύει:

$$\frac{EI}{\kappa L^2 AG} \ll 1, \text{ όπου } L \text{ είναι το μήκος της δοκού.}$$

Εάν συντεθούν οι δύο εξισώσεις για μια ομογενή δοκό σταθερής διατομής προκύπτει:

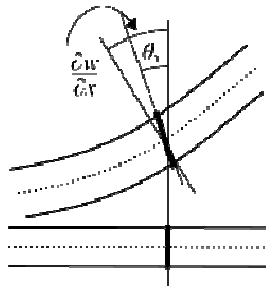
$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\kappa AG} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (2.12)$$

Για το μη-μόνιμο φαινόμενο όπως όταν εξετάζεται η συμπεριφορά της δοκού σε ταλαντώσεις, οι εξισώσεις της θεωρίας δοκών του Timoshenko γράφονται:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (2.14)$$

όπου $w(x,t)$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της δοκού και $\varphi(x,t)$ η γωνιακή μετατόπιση. Πρέπει να σημειωθεί ότι αντίθετα με την θεωρία Euler-Bernoulli, η γωνιακή μετατόπιση είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και δεν προσεγγίζεται με την κλίση της μετατόπισης (απεικονίζεται καλύτερα στο **Σχήμα 2.10**).



Σχήμα 2.10: Η γωνία στροφής στη δοκό Timoshenko δεν ισούται με την κλίση $\frac{dw}{dx}$ (WIK).

Με το σύμβολο ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του υλικού της δοκού, με A το εμβαδόν της διατομής, με E το μέτρο ελαστικότητας με G το μέτρο διάτμησης, με I την ροπή αδράνειας, με κ τον συντελεστή διάτμησης του Timoshenko που εξαρτάται από την γεωμετρία και με $q(x,t)$ το καταναμημένο φορτίο. Όλα αυτά τα μεγέθη δεν είναι απαραίτητο να είναι σταθερές ποσότητες.

Στην περίπτωση γραμμικά ελαστικής, ισότροπης και ομογενούς δοκού σταθερής διατομής, οι δύο τελευταίες εξισώσεις συνδυάζονται στη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{EI m}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Jm}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = q(x, t) + \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Όταν υπολογίζεται και η επίδραση των αξονικών δυνάμεων στις μετατοπίσεις της δοκού προστίθεται ένας επιπλέον όρος και τελικά η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{mEI}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Jm}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = q(x, t) + \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Τέλος, μπορεί να θεωρηθεί σε ορισμένες περιπτώσεις και μια δύναμη απόσβεσης που είναι ανάλογη της ταχύτητας: $\eta(x) \frac{\partial w}{\partial t}$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο είναι η:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{mEI}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Jm}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ + \frac{J\eta(x)}{kAG} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta(x) \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \eta(x) \frac{\partial w}{\partial t} \\ = q(x, t) + \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.1.4 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Στη συνέχεια θα περιγραφεί η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στις δοκούς σύμφωνα με τη θεωρία Bernoulli-Euler (Felippa, 2004):

Η ολική δυναμική ενέργεια της δοκού είναι:

$$\Pi = U - W \quad (2.18)$$

όπου με Π συμβολίζεται το ολικό συναρτησιακό της δυναμικής ενέργειας και με U και W συμβολίζονται η εσωτερική και εξωτερική ενέργεια, αντίστοιχα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, στο μοντέλο Bernoulli-Euler περιλαμβάνεται μόνο η ενέργεια κάμψης στην εσωτερική ενέργεια U (με V εδώ συμβολίζεται ο όγκος και με w μικρό η κατακόρυφη μετατόπιση):

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L M \kappa dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dx = \\ \frac{1}{2} \int_0^L w'' EI w'' dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

Το εξωτερικό έργο W σχετίζεται με την επιβληθείσα κατακόρυφη δύναμη:

$$W = \int_0^L q w dx \quad (2.20)$$

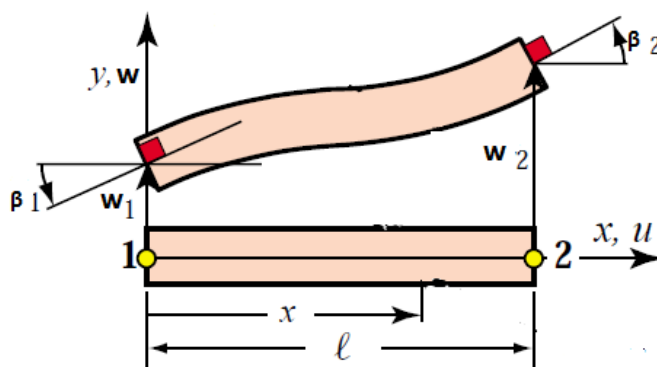
Τα τρία συναρτησιακά Π, U, W πρέπει να αντιμετωπίζονται ως εξαρτώμενα από την κατακόρυφη μετατόπιση $w(x)$. Όταν αυτή η εξάρτηση πρέπει να τονίζεται προτιμάται η γραφή $\Pi[w], U[w]$ και $W[w]$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το συναρτησιακό $\Pi[w]$ περιέχει μέχρι και τις δεύτερες παραγώγους του w γιατί ο όρος $w''=k$ εμφανίζεται στην εσωτερική ενέργεια U . Ο αριθμός k ονομάζεται δείκτης μεταβολής (variational index). Ο λογισμός των μεταβολών υποδεικνύει ότι όταν ο δείκτης είναι 2, οι αποδεκτές μετατοπίσεις $w(x)$ πρέπει να είναι συνεχείς, να έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους (κλίσεις ή περιστροφές) και να ικανοποιούν ακριβώς τις οριακές συνθήκες. Άρα, οι αποδεκτές μετατοπίσεις πρέπει να είναι C^1 συνεχείς. Αυτή η συνθήκη καθοδηγεί την κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων δοκού που θα περιγραφούν στη συνέχεια (Felippa, 2004).

Τα πεπερασμένα στοιχεία δοκού ορίζονται υποδιαιρώντας μια δοκό κατά τη διαμήκη διεύθυνση. Το απλούστερο πεπερασμένο στοιχείο επίπεδης δοκού Bernoulli-Euler έχει δύο κόμβους (κόμβος 1 και κόμβος 2 όπως στο **Σχήμα 2.11**) και τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι συγκεντρώνονται στο διάνυσμα κομβικών μετατοπίσεων (Felippa, 2004):

$$\mathbf{u}^e = [w_1 \ \beta_1 \ w_2 \ \beta_2]^T \quad (2.21)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας που περιγράφηκαν (απεικονίζονται στο **Σχήμα 2.11**) χρησιμοποιούνται για να ορίσουν μοναδικά την μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης $w^e(x)$ στο πεπερασμένο στοιχείο. Η απαίτηση της συνέχειας C^1 ορίζει ότι τόσο η $w(x)$ όσο και η κλίση $\beta=w'(x)=\frac{dw(x)}{dx}$ πρέπει να είναι συνεχείς σε όλη τη δοκό και ενδιάμεσα στα στοιχεία δοκού (Felippa, 2004).



Σχήμα 2.11: Βαθμοί ελευθερίας του πεπερασμένου στοιχείου δοκού (w,β) (Felippa, 2004).

Η συνέχεια C^1 μπορεί να επιτευχθεί για κάθε στοιχείο με την επιλογή πολυωνυμικών συναρτήσεων παρεμβολής (συναρτήσεων μορφής ή shape functions) επειδή τα πολυώνυμα είναι C^∞ συνεχή. Το ταίριασμα των κομβικών μετατοπίσεων και περιστροφών με τις αντίστοιχες των γειτονικών τους στοιχείων εξασφαλίζει την απαραίτητη συνέχεια μεταξύ των στοιχείων (Felippa, 2004).

Οι απλούστερες συναρτήσεις μορφής που εξασφαλίζουν την απαίτηση συνέχειας C^1 για τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων ονομάζονται κυβικές Ερμιτιανές συναρτήσεις μορφής (Hermitian cubic shape functions). Η σχέση παρεμβολής που βασίζεται σ' αυτές τις συναρτήσεις είναι (Felippa, 2004):

Κεφάλαιο 2-Θεωρία πεπερασμένων στοιχείων

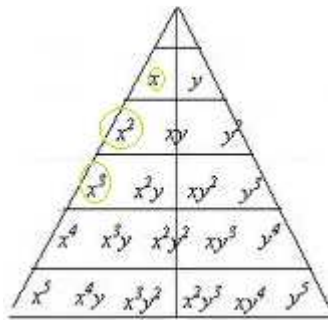
$$w^e = [N_{v1}^e \quad N_{\theta1}^e \quad N_{v2}^e \quad N_{\theta2}^e] \begin{bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = N^e u^e \quad (2.22)$$

Οι συναρτήσεις μορφής (shape functions) N εξάγονται ως εξής:

Θεωρείται ότι η διακύμανση της κατακόρυφης μετατόπισης κατά μήκος του στοιχείου είναι (Logan, 2005):

$$w(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (2.23)$$

Επειδή υπάρχουν 4 βαθμοί ελευθερίας είναι κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί το πλήρες κυβικό πολυώνυμο. Το κυβικό πολυώνυμο επίσης ικανοποιεί τη βασική διαφορική εξίσωση της ράβδου και τις προϋποθέσεις συνέχειας της μετατόπισης και της κλίσης στους κόμβους που ανήκουν σε δύο διπλανά στοιχεία (Logan, 2005). Με τη βοήθεια του τριγώνου του Πασκάλ (βλ. **Σχήμα 2.12**) που περιλαμβάνει τους συντελεστές πολυωνύμων δύο μεταβλητών 1ου έως 5ου βαθμού είναι δυνατόν να παρουσιαστεί καλύτερα η επιλογή των όρων που θα χρησιμοποιηθούν σε ένα πολυώνυμο παρεμβολής ειδικά σε πεπερασμένα στοιχεία όπως τα στοιχεία πλάκας που θα παρουσιαστούν σε επόμενη υποενότητα.



Σχήμα 2.12: Τρίγωνο του Πασκάλ. Οι σημειωμένοι όροι είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται για το πολυώνυμο παρεμβολής του πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού.

Στη συνέχεια γράφονται οι οριακές συνθήκες στα δύο άκρα του κάθε πεπερασμένου στοιχείου (Logan, 2005):

$$w(0) = w_{1y} = a_4 \quad (2.24)$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = \beta_1 = a_3 \quad (2.25)$$

$$w(L) = w_{2y} = a_1 L^3 + a_2 L^2 + a_3 L + a_4 \quad (2.26)$$

$$\frac{dw(L)}{dx} = \beta_2 = 3a_1 L^2 + 2a_2 L + a_3 \quad (2.27)$$

όπου η σχέση $\beta = \frac{dw}{dx}$ ισχύει για μικρές γωνίες περιστροφής β .

Λύνοντας το σύστημα των τεσσάρων προηγούμενων εξισώσεων προκύπτουν τα a_1 ως a_4 σε σχέση με τους κομβικούς βαθμούς ελευθερίας και, στη συνέχεια, αντικαθίστανται στο πολυώνυμο παρεμβολής που υποτέθηκε (Logan, 2005):

$$w = \left[\frac{2}{L^3} (w_{1y} - w_{2y}) + \frac{1}{L^2} (\beta_1 + \beta_2) \right] x^3 + \left[-\frac{3}{L^2} (w_{1y} - w_{2y}) - \frac{1}{L} (2\beta_1 + \beta_2) \right] x^2 + \beta_1 x + \beta_{1y} \quad (2.28)$$

το οποίο σε μητρική μορφή γράφεται :

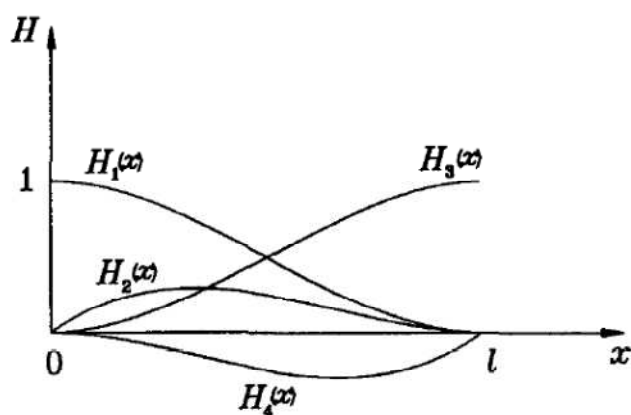
$w = [N] \{d\}$ όπου:

$$d = \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \beta_1 \\ w_{2y} \\ \beta_2 \end{Bmatrix}, \quad [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (2.29)$$

και

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2L + L^3), \quad N_2 = \frac{1}{L^3} (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3), \quad N_3 = \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2L), \quad N_4 = \frac{1}{L^3} (x^3L - x^2L^2) \quad (2.30)$$

έτσι προκύπτουν οι συναρτήσεις μορφής του στοιχείου δοκού N_1, N_2, N_3, N_4 . Αυτές οι κυβικές συναρτήσεις μορφής (ή παρεμβολής) είναι γνωστές ως κυβικές συναρτήσεις παρεμβολής Hermite (βλ. Σχήμα 2.13). Για το στοιχείο δοκού, η N_1 παίρνει την τιμή 1 όταν γράφεται στον κόμβο 1 (τοπική αρίθμηση) και την τιμή 0 όταν γράφεται στον κόμβο 2. Επειδή η N_2 σχετίζεται με τη γωνία ϕ_1 λαμβάνει την τιμή 1 στον κόμβο 1 και την τιμή 0 στον κόμβο 2. Για τις συναρτήσεις μορφής N_3 και N_4 ισχύουν τα αντίθετα (Logan, 2005).



Σχήμα 2.13: Κυβικές συναρτήσεις Hermite ($H_i = N_i$) (Kwon & Bang, 1997).

Το επόμενο βήμα για την κατάστροψη του μητρώου δυσκαμψίας είναι να ληφθεί υπόψη η σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Θεωρείται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση αξονικής παραμόρφωσης-μετατόπισης:

$$\epsilon_x(x,y) = \frac{du}{dx} \quad (2.31)$$

όπου u είναι η συνάρτηση της αξονικής μετατόπισης. Από την παραμορφωμένη θέση της δοκού, συσχετίζεται η αξονική μετατόπιση με την κατακόρυφη μετατόπιση (Logan, 2005):

$$u = -\gamma \frac{dw}{dx} \quad (2.32)$$

όπου θεωρείται όπως έχει προαναφερθεί, ότι οι διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση και, εν γένει, έχουν μικρή γωνία στροφής.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η:

$$\epsilon_x(x, y) = -\gamma \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.33)$$

Από την κλασική θεωρία των δοκών είναι ότι η καμπτική ροπή και η διατμητική δύναμη σχετίζονται με τη συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης (Logan, 2005). Άρα μπορούν να γραφούν οι εξής σχέσεις:

$$m(x) = EI \frac{d^2w}{dx^2}, \quad V = EI \frac{d^3w}{dx^3} \quad (2.34)$$

Στη συνέχεια θα εξαχθεί το μητρώο δυσκαμψίας k χρησιμοποιώντας την άμεση προσέγγιση της ισορροπίας δυνάμεων και ροπών (direct stiffness) (Logan, 2005). Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις και τηρώντας τις συμβάσεις προσήμου για τις δυνάμεις και τις ροπές έχουμε:

$$f_{1y} = V = EI \frac{d^3w(0)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (12w_{1y} + 6L\beta_1 - 12w_{2y} + 6L\beta_2) \quad (2.35)$$

$$m_1 = -m = -EI \frac{d^2w(0)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3} (6Lw_{1y} + 4L^2\beta_1 - 6Lw_{2y} + 2L^2\beta_2) \quad (2.36)$$

$$f_{2y} = -V = -EI \frac{d^3w(L)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (-12w_{1y} - 6L\beta_1 + 12w_{2y} - 6L\beta_2) \quad (2.37)$$

$$m_2 = m = EI \frac{d^2w(L)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3} (6Lw_{1y} + 2L^2\beta_1 - 6Lw_{2y} + 4L^2\beta_2) \quad (2.38)$$

όπου τα αρνητικά πρόσημα στην δεύτερη και την τρίτη εξίσωση προκύπτουν από τις συμβάσεις προσήμου. Σε μητρωϊκή μορφή οι παραπάνω εξισώσεις που συσχετίζουν τις κομβικές δυνάμεις με τις κομβικές μετατοπίσεις γράφονται ως εξής (Logan, 2005):

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \beta_1 \\ w_{2y} \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

όπου το μητρώο δυσκαμψίας είναι το:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Από την εξίσωση 2.39 γίνεται προφανές ότι το μητρώο δυσκαμψίας συνδέει κατακόρυφες δυνάμεις και καμπτικές ροπές με κατακόρυφες μετατοπίσεις και περιστροφές εφόσον έχουν αγνοηθεί οι επιδράσεις των αξονικών δυνάμεων.

Σε δοκούς μικρού μήκους, η κατακόρυφη διατμητική παραμόρφωση μπορεί να είναι σημαντική και μπορεί να είναι ίδιας τάξης μεγέθους με την ολική παραμόρφωση της δοκού. Αυτό φαίνεται από τις εκφράσεις που δίνουν τις συνεισφορές της καμπτικής και της διατμητικής παραμόρφωσης στη δοκό. Η καμπτική συνεισφορά είναι ανάλογη του $(L/h)^3$ (όπου L το μήκος της δοκού και h το πάχος) ενώ η διατμητική είναι ανάλογη του (L/h) . Ένας γενικός κανόνας για τις διατομές σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ότι για ένα μήκος δοκού οκτώ φορές μεγαλύτερο από το πλάτος, η κατακόρυφη μετατόπιση λόγω διάτμησης είναι μικρότερη από το 5% της μετατόπισης λόγω της κάμψης (Logan, 2005).

Η κατάστρωση του μητρικού δυσκαμψίας με το συνυπολογισμό της επίδρασης της διατμητικής παραμόρφωσης έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Η ενσωμάτωση της διατμητικής παραμόρφωσης στη θεωρία δοκών με σκοπό τη μελέτη προβλημάτων ταλαντώσεων έχει γίνει, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, από τον Timoshenko και το μοντέλο της δοκού που περιγράφεται από τη θεωρία δοκών του Timoshenko ονομάζεται δοκός Timoshenko (Timoshenko beam) (Logan, 2005)

Η ενσωμάτωση της διατμητικής παραμόρφωσης στη θεωρία των δοκών προκύπτει ως εξής, σύμφωνα με τον Logan (Logan, 2005):

Αντί να θεωρείται ότι οι επίπεδες τομές παραμένουν επίπεδες και μετά την κάμψη, τώρα υπολογίζεται και τη συνεισφορά της διατμητικής παραμόρφωσης. Για μια τομή μιας δοκού με διαφορετικό μήκος dx , η διατομή παραμένει επίπεδη αλλά όχι πλέον κάθετη στον ουδέτερο άξονα, λόγω του ότι η διατμητική δύναμη οδηγεί σε έναν όρο περιστροφής που αντιπροσωπεύεται από μια γωνία ϕ . Το ολικό βέλος της δοκού σε ένα σημείο x τώρα απαρτίζεται από δύο μέρη, ένα το οποίο προκαλείται από την κάμψη και ένα άλλο από τη διατμητική δύναμη και η κλίση της παραμορφωμένης καμπύλης τώρα δίνεται από την:

$$\frac{dw}{dx} = \varphi(x) + \beta(x) \quad (2.41)$$

όπου η περιστροφή λόγω της καμπτικής ροπής και λόγω της κατακόρυφης διατμητικής δύναμης δίνονται αντίστοιχα από τις $\beta(x)$ και $\phi(x)$.

Υποτίθεται, ως συνήθως, ότι το βέλος κάμψης και η περιστροφή (κλίση) είναι μικρές.

Η σχέση μεταξύ καμπτικής ροπής και καμπτικής παραμόρφωσης γράφεται τώρα:

$$M(x) = EI \frac{d\beta(x)}{dx} \quad (2.42)$$

και η σχέση μεταξύ της διατμητικής δύναμης και της διατμητικής παραμόρφωσης (περιστροφή λόγω διάτμησης) δίνεται από τη σχέση:

$$V(x) = k_s AG \phi(x) \quad (2.43)$$

Η διαφορά των $\frac{dw}{dx}$ και β αναπαριστά τη διατμητική παραμόρφωση της δοκού:

$$\gamma_{yz} = \frac{dw}{dx} - \beta \quad (2.44)$$

Τώρα, θεωρείται ένα διαφορικό στοιχείο και οι εξισώσεις που ελήφθησαν από την άθροιση κατακόρυφων δυνάμεων και την επακόλουθη άθροιση των καμπτικών ροπών. Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, λαμβάνονται τελικά οι δύο διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο (παρόμοιες μ' αυτές που παρατέθηκαν στην προηγούμενη ενότητα):

$$\frac{d}{dx} \left[k_s AG \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \right] = -w \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\beta}{dx} \right) + k_s AG \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) = 0 \quad (2.46)$$

Για να καταστρωθεί το μητρώο δυσκαμψίας για το στοιχείο δοκού συμπεριλαμβανοντας και τη διατμητική παραμόρφωση θεωρείται ότι το βέλος κάμψης δίνεται από την ίδια σχέση με πριν. Για να είναι η διατμητική παραμόρφωση γ συμβατή με το κυβικό πολυώνυμο που χρησιμοποιήθηκε για το $w(x)$, επιλέγεται το γ να είναι μια σταθερά που δίνεται από τη σχέση $\gamma=c$.

Χρησιμοποιώντας το κυβικό πολυώνυμο για το $w(x)$, την ίδια σχέση για την κλίση και την διατμητική παραμόρφωση μαζί με τις σχέσεις καμπτικής ροπής-καμπυλότητας και διατμητικής δύναμης-διατμητικής παραμόρφωσης μέσα στη σχέση καμπτικής ροπής-διατμητικής δύναμης, λαμβάνεται:

$$c = 6 a_1 g \quad (2.47)$$

όπου $g = \frac{EI}{k_s AG}$ και $k_s A$ είναι η περιοχή διάτμησης. Οι περιοχές διάτμησης A_s ποικίλουν ανάλογα με το σχήμα της διατομής. Για παράδειγμα, για ένα ορθογώνιο σχήμα η A_s λαμβάνεται ως τα 5/6 διατομής A , για μια κυκλική διατομή στερεού λαμβάνεται 0.9 φορές επί την διατομή, για μια λεπτότοιχη διατομή λαμβάνεται ίση με 2 φορές το άθροισμα του πάχους του τοίχου επί το βάθος.

Χρησιμοποιώντας προηγούμενες εξισώσεις το β μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο:

$$\beta = a_3 + 2a_2 x + (3x^2 + 6g) a_1 \quad (2.48)$$

Τώρα μπορούν να εκφραστούν οι συντελεστές a_1 έως a_4 συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων w_{1y} και w_{2y} και περιστροφών β_1 και β_2 της δοκού στα άκρα $x=0$ και $x=L$. Οι εκφράσεις αυτές είναι οι εξής:

$$a_1 = \frac{2w_{1y} + L\beta_1 - 2w_{2y} + L\beta_2}{L(L^2 + 12g)} \quad (2.49)$$

$$a_2 = \frac{-3Lw_{1y} - (2L^2 + 6g)\beta_1 + 3Lw_{2y} + (-L^2 + 6g)\beta_2}{L(L^2 + 12g)} \quad (2.50)$$

$$a_3 = \frac{-12gw_{1y} + (L^3 + 6gL)\beta_1 + 12gw_{2y} - 6gL\beta_2}{L(L^2 + 12g)} \quad (2.51)$$

$$a_4 = w_{1y} \quad (2.52)$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές στην εξίσωση του w λαμβάνεται:

$$w = \frac{2w_{1y} + L\beta_1 - 2w_{2y} + L\beta_2}{L(L^2 + 12g)} x^3 + \frac{-3Lw_{1y} - (2L^2 + 6g)\beta_1 + 3Lw_{2y} + (-L^2 + 6g)\beta_2}{L(L^2 + 12g)} x^2 + \quad (2.53)$$

Κεφάλαιο 2-Θεωρία πεπερασμένων στοιχείων

$$\frac{-12gw_{1y}+(L^3+6gL)\beta_1+12gw_{2y}-6gL\beta_2}{L(L^2+12g)}x + \beta_{1y}$$

Με παρόμοιο τρόπο όπως και πριν, καταστρώνονται οι εξισώσεις για το στοιχείο δοκού:

$$f_{1y} = V(0) = 6EIa_1 = \frac{EI(12w+6L\beta_1-12w_{2y}+6L\beta_2)}{L(L^2+12g)} \quad (2.54)$$

$$m_1 = -m(0) = -2EIa_2 = \frac{EI[6Lw+(4L^2+12g)\beta_1-6Lw_{2y}+(2L^2-12g)\beta_2]}{L(L^2+12g)} \quad (2.55)$$

$$f_{2y} = -V(L) = \frac{EI(-12w_{1y}-6L\beta_1+12w_{2y}-6L\beta_2)}{L(L^2+12g)} \quad (2.56)$$

$$m_2 = m(L) = \frac{EI[6Lw_{1y}+(2L^2-12g)\beta_1-6Lw_{2y}+(4L^2+12g)\beta_2]}{L(L^2+12g)} \quad (2.57)$$

και σε μητρική μορφή:

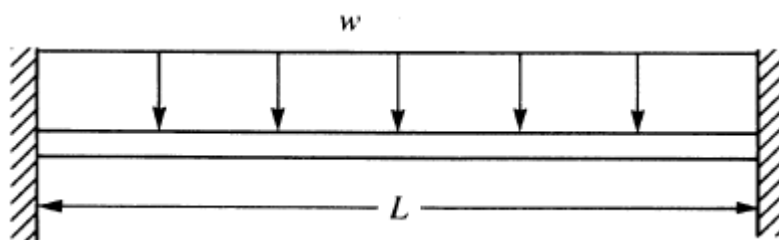
$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1y} \\ \beta_1 \\ w_{2y} \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

όπου τώρα το μητρώο δυσκαμψίας περιλαμβάνει συνεισφορές τόσο της καμπτικής όσο και της διατμητικής παραμόρφωσης:

$$k = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2+12g) & -6L & (2L^2-12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2-12g) & -6L & (4L^2+12g) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

2.2.1.5 Κατανεμημένο φορτίο

Οι δοκοί μπορούν να υποστηρίξουν τόσο κατανεμημένη όσο και συγκεντρωμένη φόρτιση. Στην περίπτωση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου (βλ. **Σχήμα 2.14**), μπορεί να αντικατασταθεί το φορτίο με συγκεντρωμένα κομβικά φορτία και ροπές που τείνουν να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στη δοκό όπως το πραγματικό κατανεμημένο φορτίο. Αυτό γίνεται αντικαθιστώντας το ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο με ένα σύστημα στατικά ισοδύναμων δυνάμεων που συνίσταται σε συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις και ροπές στο κάθε άκρο του φορέα που υπόκειται στην κατανεμημένη φόρτιση. Αυτό συμβαίνει επειδή τόσο οι στατικά ισοδύναμες συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις και ροπές όσο και το αρχικό κατανεμημένο φορτίο έχουν το ίδιο αποτέλεσμα όσον αφορά την δύναμη και τη ροπή γύρω από ένα τυχαίο σημείο (Logan, 2005).



Σχήμα 2.14: Καταναμημένο φορτίο σε δοκό (στην περίπτωση αυτή εικονίζεται μια αμφίπακτη δοκός) (Logan, 2005).

Η μέθοδος του ισοδύναμου έργου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντικατασταθεί ένα καταναμημένο φορτίο με ένα σύνολο διακριτών φορτίων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι το έργο που παράγει ένα καταναμημένο φορτίο $w(x)$ σε σχέση με το πεδίο των μετατοπίσεων είναι ίσο με το έργο που παράγουν οι κομβικές φορτίσεις f_{1y} και m_1 που σχετίζονται με τις κομβικές μετατοπίσεις d_{1y} και β_1 για τυχαίες κομβικές μετατοπίσεις. Για να μην υπάρχει σύγχυση με τον συμβολισμό $w(x)$ (ο οποίος σε ολόκληρη την εργασία συμβολίζει το βέλος κάμψης) ο οποίος στην παρούσα υποενότητα υποδηλώνει το καταναμημένο φορτίο, μόνο για αυτήν την ενότητα θα υιοθετηθεί ο συμβολισμός v για το βέλος κάμψης και d για τα βέλη στους κόμβους (Logan, 2005).

Το έργο λόγω του καταναμημένου φορτίου δίνεται ως εξής:

$$W_{\text{distributed}} = \int_0^L w(x)v(x)dx \quad (2.60)$$

όπου η $v(x)$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση. Το έργο λόγω των διακριτών κομβικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\text{διακρ.}} = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + f_{1y}d_{1y} + f_{2y}d_{2y} \quad (2.61)$$

Μπορούν τώρα να προσδιοριστούν οι κομβικές ροπές και δυνάμεις m_1 , m_2 , f_{1y} και f_{2y} που χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν το καταναμημένο φορτίο με βάση την έννοια του ισοδύναμου έργου. Αυτό γίνεται θέτοντας $W_{\text{καταναμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ για τυχαίες μετατοπίσεις β_1 , β_2 , d_{1y} και d_{2y} .

Για παράδειγμα, θεωρείται μια δοκός που υπόκειται σε καταναμημένη φόρτιση. Θέτοντας $W_{\text{καταναμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ και θεωρώντας τυχαίες μετατοπίσεις β_1 , β_2 , d_{1y} και d_{2y} βρίσκονται οι ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις m_1 , m_2 , f_{1y} , f_{2y} .

Κάνοντας χρήση προηγούμενων σχέσεων για $W_{\text{καταναμημ.}} = W_{\text{διακρ.}}$ λαμβάνεται:

$$\int_0^L w(x)v(x)dx = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + f_{1y}d_{1y} + f_{2y}d_{2y} \quad (2.62)$$

όπου $m_1\beta_1$ και $m_2\beta_2$ είναι το έργο λόγω των συγκεντρωμένων κομβικών ροπών που προκαλούν τις αντίστοιχες επικόμβιες περιστροφές και $f_{1y}d_{1y}$ και $f_{2y}d_{2y}$ είναι το έργο λόγω των επικόμβιων δυνάμεων που προκαλούν επικόμβιες μετατοπίσεις. Αναλύοντας την προηγούμενη ισότητα και αντικαθιστώντας το $w(x)$ με το $-w$ και λαμβάνοντας το $v(x)$ από προηγούμενη εξίσωση προκύπτει το έργο λόγω του καταναμημένου φορτίου (Logan, 2005):

Κεφάλαιο 2-Θεωρία πεπερασμένων στοιχείων

$$\int_0^L w(x)v(x)dx = -\frac{Lw}{2}(d_{1y} - d_{2y}) - \frac{L^2w}{4}(\beta_1 + \beta_2) - Lw(d_{2y} - d_{1y}) + \frac{L^2w}{3}(2\beta_1 + \beta_2) - \beta_1\left(\frac{L^2w}{2}\right) - d_{1y}(wL) \quad (2.63)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις και για τυχαίες κομβικές μετατοπίσεις, έστω $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $d_{1y} = 0$, $d_{2y} = 0$ λαμβάνεται:

$$m_1(1) = -\left(\frac{L^2w}{4} - \frac{2}{3}L^2w + \frac{L^2w}{2}\right) = -\frac{wL^2}{12} \quad (2.64)$$

Παρομοίως, αν υποθεθεί $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $d_{1y} = 0$, $d_{2y} = 0$, λαμβάνεται:

$$m_2(1) = \left(\frac{L^2w}{4} + \frac{L^2w}{3}\right) = \frac{wL^2}{12} \quad (2.65)$$

Τελικά, θεωρώντας όλες τις μετατοπίσεις μηδενικές εκτός των d_{1y} αρχικά και του d_{2y} μετά λαμβάνεται:

$$f_{1y}(1) = \frac{Lw}{2} + Lw - Lw = -\frac{Lw}{2} \quad (2.66)$$

$$f_{2y}(1) = \frac{Lw}{2} - Lw = -\frac{Lw}{2} \quad (2.67)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι γενικά για κάθε δεδομένη συνάρτηση κατανεμημένου φορτίου μπορεί να γίνει πολλαπλασιασμός αρχικά με το $v(x)$ και μετά ολοκλήρωση σύμφωνα με την έκφραση $\int_0^L w(x)v(x)dx$ για να ληφθούν οι συγκεντρωμένες κομβικές δυνάμεις ή ροπές που θα αντικαταστήσουν το κατανεμημένο φορτίο. Επιπλέον, μπορούν να ληφθούν οι ισοδύναμες δυνάμεις μέσω των αντιδράσεων στις στηρίξεις χρησιμοποιώντας τη θεωρία της δομικής ανάλυσης, για την οποία υπάρχουν διάφοροι συγκεντρωτικοί πίνακες (Logan, 2005), (Chandrupatla & Belegundu, 2005).

Αν ένα συγκεντρωμένο φορτίο ασκείται σε σημείο εκτός του φυσικού συνόρου μεταξύ δύο στοιχείων, χρησιμοποιείται πάλι η ιδέα του **ισοδύναμου έργου** (ισοδύναμων κομβικών δυνάμεων) για να αντικατασταθεί το συγκεντρωμένο φορτίο με κομβικές συγκεντρωμένες τιμές δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα ενός στοιχείου αντί να θεωρηθεί επιπλέον κόμβος στο σημείο που ασκείται το φορτίο .

Στη συνέχεια, θα γίνει αναφορά σε μια πιο γενική μεθοδολογία για τα κατανεμημένα ή συγκεντρωμένα φορτία που ασκούνται σε στοιχεία δοκού, αρχίζοντας με την ακόλουθη διατύπωση για μια γενική δομή (Logan, 2005):

$$F = Kd - F_0 \quad (2.68)$$

όπου F είναι το μητρώο των συγκεντρωμένων κομβικών δυνάμεων και F_0 οι ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις εκφρασμένες σε συνιστώσες του καθολικού συστήματος συντεταγμένων που είναι τέτοιου μεγέθους ώστε να προκαλούν τις ίδιες μετατοπίσεις στους κόμβους με αυτές που θα προκαλούσε το κατανεμημένο φορτίο.

Χρησιμοποιείται η ιδέα της κατάστρωσης των εξισώσεων των στοιχείων μέσω της αρχής ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας. Θεωρώντας ότι υπάρχει μόνο κατανεμημένο φορτίο η σχέση γίνεται : $F_o = Kd$

Λύνοντας την σχέση ως προς d και μετά αντικαθιστώντας τις ολικές μετατοπίσεις d και τις ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις F_o στη **σχέση 2.68** λαμβάνονται οι πραγματικές καθολικές κομβικές δυνάμεις. Για παράδειγμα, για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο w που ασκείται σε μια δοκό με 1 πεπερασμένο στοιχείο προκύπτει:

$$F_o = \begin{Bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Αυτή η ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε τοπικό σύστημα (ενός στοιχείου) για να ληφθούν οι τοπικές επικόμβιες δυνάμεις που εμφανίζονται σε μεμονωμένα στοιχεία μιας κατασκευής, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $f = kd - f_o$.

2.2.1.6 Παρατηρήσεις

Αρχικά, θα γίνουν κάποια σχόλια και θα συγκριθεί η λύση μέσω επίλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με την ακριβή αναλυτική λύση για μια δοκό.

Για να εφαρμοστεί η κλασική θεωρία δοκών, επιλύεται αναλυτικά η εξίσωση της ελαστικής γραμμής και λαμβάνονται υπόψη κατάλληλες οριακές συνθήκες κατά την ολοκλήρωση (οι οποίες αντιστοιχούν στις στηρίξεις).

Αν επιλυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας το στοιχείο δοκού, λαμβάνεται με μεγάλη ακρίβεια αποτέλεσμα ίδιο με αυτό της αναλυτικής λύσης, όσον αφορά στα βέλη κάμψης. Ο λόγος για τον οποίο οι κομβικές τιμές από την επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία είναι ακριβείς είναι ότι οι κομβικές δυνάμεις έχουν υπολογιστεί με βάση την ισοδύναμη ενέργεια ή έργο που παράγει το κατανεμημένο φορτίο με βάση το κυβικό πολυώνυμο που υποτέθηκε για την μετατόπιση σε κάθε στοιχείο.

Οι τιμές του βέλους κάμψης και της κλίσης σε άλλα σημεία κατά μήκος της δοκού λαμβάνονται χρησιμοποιώντας το κυβικό πολυώνυμο που δίνει τη μετατόπιση και θέτοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Συγκρίνοντας αποτελέσματα της αναλυτικής επίλυσης και της επίλυσης με πεπερασμένα στοιχεία θα παρατηρηθεί ότι στη θεωρία δοκών προβλέπονται μεγαλύτερες τιμές μετατοπίσεων από αυτές που προβλέπει η επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Γενικά, οι μετατοπίσεις που δίνονται από το κυβικό πολυώνυμο είναι μικρότερες από τις κανονικές εκτός από τις τιμές στους κόμβους. Αυτό συμβαίνει πάντα σε δοκούς που δέχονται κάποιου είδους κατανεμημένου φορτίου και χρησιμοποιείται το κυβικό πολυώνυμο για τις μετατοπίσεις. Η εξαίρεση που υπάρχει για τους κόμβους οφείλεται στο γεγονός ότι έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του ισοδύναμου έργου για την αντικατάσταση του κατανεμημένου φορτίου με τις επικόμβιες δυνάμεις.

Η θεωρία δοκών προβλέπει ένα τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο για το βέλος κάμψης μιας δοκού που υπόκειται σε **κατανεμημένη φόρτιση** ενώ η λύση των πεπερασμένων στοιχείων υποθέτει ότι η δοκός συμπεριφέρεται σύμφωνα με ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο για κάθε στοιχείο και για οποιαδήποτε φόρτιση. Έτσι, προβλέπει μια πιο «δύσκαμπτη» δομή απ' ότι στην πραγματικότητα. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων αναγκάζει τη δοκό να έχει συγκεκριμένους τρόπους μετατόπισης και έτσι, πραγματικά, οδηγεί σε πιο δύσκαμπτο μοντέλο. Ωστόσο, όσο περισσότερα στοιχεία χρησιμοποιηθούν, η λύση των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει στη λύση της θεωρίας των δοκών (Logan, 2005).

Στην ειδική περίπτωση που μια δοκός υπόκειται μόνο σε κομβικά **συγκεντρωμένα φορτία**, η θεωρία δοκών προβλέπει συμπεριφορά της δοκού σύμφωνα με τριτοβάθμιο πολυώνυμο καθώς η ροπή είναι γραμμική συνάρτηση και μετά τη διπλή ολοκλήρωση προκύπτει τριτοβάθμια συνάρτηση μετατόπισης. Σ' αυτήν την ειδική περίπτωση, η λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία συμφωνεί απολύτως με τη λύση της θεωρίας δοκών για όλα τα σημεία της δοκού.

Όσον αφορά τις ροπές και τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, η θεωρία δοκών προβλέπει μια δευτεροβάθμια συνάρτηση για τη ροπή και μια γραμμική συνάρτηση για τη δοκό στην περίπτωση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου. Ωστόσο, η λύση σύμφωνα με τα πεπερασμένα στοιχεία προβλέπει μια γραμμική συνάρτηση για τη ροπή και μια σταθερή διατμητική δύναμη για κάθε πεπερασμένο στοιχείο.

Και σ' αυτήν την περίπτωση, η λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία προβλέπει ακριβείς τιμές στους κόμβους των στοιχείων και μικρότερες τιμές σε άλλα ενδιάμεσα σημεία.

Η καμπτική ροπή προέρχεται από διπλή παραγωγή της συνάρτησης της μετατόπισης και γι' αυτό χρειάζεται περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία για να μοντελοποιηθεί σωστά. Έτσι, η λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία προβλέπει πιο σωστά τις τιμές της μετατόπισης παρά τις τιμές της καμπτικής ροπής. Η καλύτερη προσέγγιση της καμπτικής ροπής γίνεται στο μέσον του στοιχείου.

Η διατμητική δύναμη προκύπτει με τριπλή παραγωγή της συνάρτησης μετατόπισης. Για τη δοκό με ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση η δύναμη είναι σταθερή διαμέσου του μοντέλου. Και πάλι, η καλύτερη προσέγγιση για την διατμητική δύναμη είναι στο μέσον κάθε στοιχείου.

Για να βελτιωθεί η επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν περισσότερα στοιχεία στο μοντέλο (εκλέπτυνση πλέγματος) ή να χρησιμοποιηθούν ανώτερης τάξης στοιχεία, όπως ένα στοιχείο με πέμπτου βαθμού συνάρτηση μετατόπισης με τρεις κόμβους ανά στοιχείο.

2.2.2 Στοιχεία Πλακών (Plate Elements)

2.2.2.1 Θεωρία πλακών

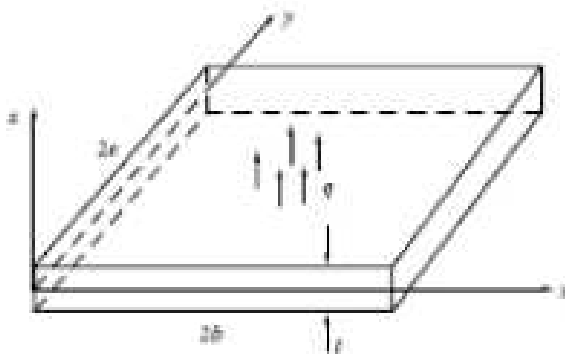
Η θεωρία πλακών είναι θεωρία της Μηχανικής η οποία εφαρμόζεται σε ολόσωμους φορείς των οποίων οι δύο διαστάσεις είναι σημαντικά μεγαλύτερες της τρίτης (συνήθως το πάχος-

η διάσταση ως προς τον άξονα z- είναι πολύ μικρότερο σε σύγκριση με τις άλλες 2 διαστάσεις x και y-1η παραδοχή).

Η πλάκα περιέχεται μεταξύ 2 παραλλήλων επιπέδων της άνω και της κάτω επιφάνειας, των οποίων η απόσταση ορίζει το πάχος t της πλάκας. Το επίπεδο το οποίο βρίσκεται στο μισό της απόστασης της άνω και κάτω επιφάνειας της πλάκας (κατά τον άξονα z) ονομάζεται μέση επιφάνεια. Γενικά η πλάκα όπως προκύπτει από τη θεωρία πλακών μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από το τριδιάστατο χωρίο (domain) Ω (βλ. Σχήμα 2.15) όπου:

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right], (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \}, \text{ όπου } A \text{ είναι η επιφάνεια της πλάκας}$$

Τα φορτία ασκούνται στην πλάκα μόνο κατά τη διεύθυνση z (δηλαδή κάθετα στην επιφάνειά της). Τα φορτία αυτά προκαλούν κάμψη στη πλάκα, στην οποία δημιουργείται βέλος κάμψης κατά τον άξονα z. Θεωρείται ότι το βέλος κάμψης της πλάκας είναι πολύ μικρότερο σε σύγκριση με το πάχος της (2η παραδοχή).



Σχήμα 2.15: Λεπτή πλάκα υπό κατακόρυφη φόρτιση (Logan, 2005).

Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες παραδοχές γίνεται δυνατόν να απλοποιηθεί ένα 3Δ πρόβλημα ελαστικότητας σε 2Δ, όμως οι καταστατικές εξισώσεις αυτού του 2Δ προβλήματος δεν έχουν την απόλυτη ακρίβεια των εξισώσεων του πραγματικού προβλήματος (όταν το πρόβλημα είναι καθαρά 3Δ- π.χ. το πάχος της πλάκας να μην είναι αμελητέο σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις). Μερικές φορές μάλιστα οι προσεγγίσεις με τη θεωρία πλακών μπορεί να προκαλέσουν ορισμένα παράδοξα φαινόμενα (Παπαδρακάκης, 2001). Όμως, όσο πιο κοντά βρίσκεται το πρόβλημα που εξετάζεται στις προαναφερθείσες παραδοχές (όπως αν είναι καθαρά 2Δ πρόβλημα), τόσο πιο ακριβή αποτελέσματα λαμβάνονται από τη θεωρία πλακών. Το πάχος της πλάκας το οποίο αναφέρεται και στη μαθηματική της περιγραφή είναι δυνατό να θεωρηθεί γενικά ως μη σταθερή συνάρτηση $t=t(x,y)$ (Hughes, 2000).

Η θεωρία πλακών προτιμάται σε σύγκριση με τη θεωρία 3Δ ελαστικότητας διότι η θεωρία της 3Δ ελαστικότητας απαιτεί την επίλυση σημαντικά μεγαλύτερων συστημάτων εξισώσεων και, μάλιστα, προκύπτουν αριθμητικά προβλήματα όταν εξετάζουμε λεπτές πλάκες διότι το μητρώο δυσκαμψίας παύει να είναι «καλά σταθεροποιημένο» (conditioned) και προκύπτουν προβλήματα με την αντιστροφή του (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005). Οστόσο και η χρήση της θεωρίας πλακών σε ορισμένες περιπτώσεις κατά την εφαρμογή της

σε επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να προκαλέσει επιπρόσθετα προβλήματα.

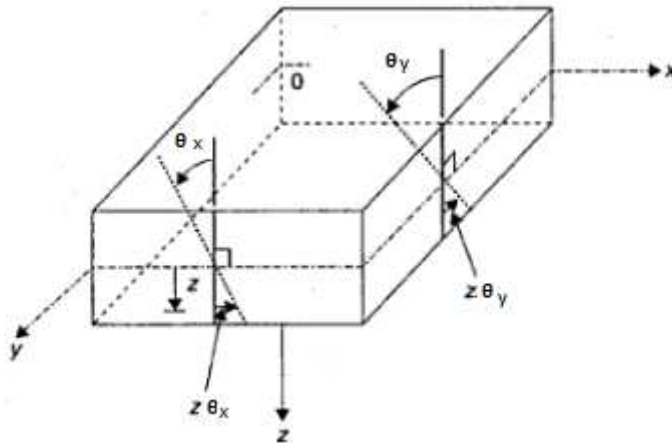
Γενικά, όπως αναφέρθηκε και για τις δοκούς, υπάρχουν δύο γενικές θεωρίες για τις πλάκες, που διαχωρίζονται ανάλογα με το πάχος των πλακών. Στις λεπτές πλάκες ισχύει η θεωρία του Kirchhoff (ή Kirchhoff- Bernoulli ή κλασική θεωρία πλακών, αντίστοιχη της κλασικής θεωρίας Euler-Bernoulli για δοκούς) ενώ στις παχιές πλάκες η θεωρία Reissner-Mindlin.

Στη βιβλιογραφία, ως κριτήριο για τον διαχωρισμό μιας πλάκας σε λεπτή και παχιά αναφέρεται ο λόγος πάχους προς μήκος. Εάν ο λόγος αυτός είναι μικρός (κάτω από 1/10) τότε η πλάκα μπορεί να θεωρηθεί λεπτή και αν ο λόγος είναι πάνω από 1/10 πρέπει να θεωρείται παχιά. Εάν ο λόγος είναι αρκετά μεγαλύτερος από 1/10 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η θεωρία 3D ελαστικότητας.

Η θεωρία των λεπτών πλακών (θεωρία Kirchhoff) βασίζεται στις παραπάνω παραδοχές (Παπαδρακάκης, 2001):

- (i) Το πάχος της πλάκας είναι μικρό σχετικά με τις διαστάσεις της επιφάνειάς της.
- (ii) Η βύθιση της πλάκας είναι μικρή σε σύγκριση με το πάχος της, ενώ οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με τη μονάδα.
- (iii) Επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση και κάθετες στην παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμορφωμένη μέση επιφάνεια.
- (iv) Στη μέση επιφάνεια της πλάκας ($z=0$), οι τάσεις σ_x , τ_y , τ_{xy} είναι μηδενικές.

Σύμφωνα με τη θεωρία των πλακών η εντατική κατάσταση της πλάκας μπορεί να περιγραφεί από μία και μόνο ποσότητα: το βέλος κάμψης w του μέσου επιπέδου της. Για να εξασφαλίζεται η συνέχεια της πλάκας, δηλαδή για να μην εμφανίζονται «αποχωρισμοί» ή «τσαλακώματα» της επιφάνειας) πρέπει το βέλος κάμψης να είναι τέτοιο που να μην προκαλεί αποκόλληση δύο διαδοχικών στοιχείων ή να μην εμφανίζει μεταβολή της κλίσης έτσι που η παραμορφωμένη επιφάνεια να φαίνεται τσαλακωμένη. Για να μην εμφανίζονται τα παραπάνω φαινόμενα πρέπει κατά τη μετάβαση από ένα στοιχείο στο διπλανό του να υπάρχει συνέχεια στα βέλη και στην κάθετη προς τη διαχωριστική επιφάνεια κλίση. Για να εξασφαλισθεί αυτό πρέπει να επιλεγούν ως κομβικές παράμετροι το βέλος w και οι πρώτες παράγωγοί τους ως προς x και y (Θ_x και Θ_y – βλ. **Σχήμα 2.16**) (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).



Σχήμα 2.16: Οι βαθμοί ελευθερίας θ_x , θ_y .

Αν όμως σε ένα τύπο στοιχείων δεν εξασφαλίζεται η συνέχεια της κλίσης μεταξύ όμοιων στοιχείων (δηλαδή της παραγώγου ως προς την κάθετο στη πλευρά) τότε η χρησιμοποιηθείσα προσέγγιση μπορεί να εξασφαλίζει τη σύγκλιση εάν το βέλος και οι πρώτες παράγωγοί του είναι συνεχείς στους κόμβους ενώ οι συναρτήσεις σχήματός είναι τέτοιες ώστε να μπορούν να παραστήσουν μια κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης (σταθερή παραμόρφωση σημαίνει κάμψη με σταθερή ροπή, οπότε το μέσο επίπεδο γίνεται μια κυλινδρική επιφάνεια με σταθερή ακτίνα. Αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα, δηλαδή η δεύτερη παράγωγος του w είναι σταθερή). Η παραπάνω ασύμμορφη προσέγγιση μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από τη σύμμορφη. Αυτό δεν ισχύει όταν η διάμετρος των στοιχείων έχει γίνει πολύ μικρή οπότε τα σύμμορφα στοιχεία υπερτερούν (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Στη θεωρία λεπτών πλακών που προαναφέρθηκε, όπως και στην αντίστοιχη θεωρία Euler-Bernoulli, για δοκούς, η διατμητική παραμόρφωση δεν λαμβάνεται υπόψη και η εντατική κατάσταση της πλάκας περιγράφεται μόνο από το βέλος κάμψης $w(x,y)$. Όμως στις περιπτώσεις που απαιτείται να μελετηθούν πλάκες με σημαντικό πάχος, πλάκες που αποτελούνται από στρώσεις διαφόρων υλικών ή πλάκες στις οποίες ασκούνται **συγκεντρωμένα** φορτία, η θεωρία των λεπτών πλακών εμφανίζει σημαντικό σφάλμα.

Γι' αυτό το λόγο, στην περίπτωση των παχιών πλακών υιοθετείται η θεωρία του Mindlin (ή θεωρία Reissner-Mindlin) η οποία, σε αντιστοιχία με τη θεωρία του Timoshenko για τις δοκούς, περιλαμβάνει και την επίδραση της διατμητικής παραμόρφωσης. Η βασική διαφορά με τη θεωρία του Kirchhoff για τις λεπτές πλάκες είναι ότι επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση αλλά όχι αναγκαστικά κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας. Οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} και γ_{yz} θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες κατά τη διεύθυνση του πάχους της πλάκας και εκφράζονται με την απόκλιση του παραμορφωμένου μέσου επιπέδου της πλάκας από το κάθετο επίπεδο στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας (Παπαδρακάκης, 2001). Στη θεωρία λεπτών πλακών προκύπτουν μηδενικές οι τιμές αυτών των παραμορφώσεων.

Η μέση στροφή μιας διατομής λαμβάνεται ως το άθροισμα μιας στροφής στην οποία η διατομή θεωρείται κάθετη στη μέση επιφάνεια και μιας επιπλέον στροφής που οφείλεται στη διατμητική παραμόρφωση (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005) .

Η θεωρία Reissner- Mindlin απαιτεί συνέχεια C^0 σε αντίθεση με τη θεωρία Kirchhoff που απαιτεί C^1 συνέχεια. Έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μεγαλύτερη ποικιλία σχημάτων παρεμβολής (Hughes, 2000).

Στη συνέχεια, πριν διατυπωθεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για στοιχεία πλάκας, θα αναφερθούν κάποιες βασικές σχέσεις της θεωρίας των λεπτών πλακών και της θεωρίας των παχιών πλακών.

2.2.2.2 Αναλυτικές σχέσεις στη θεωρία λεπτών πλακών

Στη θεωρία λεπτών πλακών με βάση τις παραδοχές που αναφέρθηκαν ισχύουν τα εξής (Παπαδρακάκης, 2001):

Το βέλος κάμψης (ή «βύθιση» της μέσης επιφάνειας) των σημείων σε μια ευθεία κάθετη στη μέση επιφάνεια είναι ίδιο : $w(x,y,z)=w(x,y)$

Οι μετατοπίσεις ενός επιπέδου παράλληλο στην πλάκα που είναι κάθετο στον άξονα των X είναι:

$$u(x,y,z)=-z \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \quad (2.70)$$

Οι μετατοπίσεις σε ένα επίπεδο της πλάκας που είναι κάθετο στον άξονα των Y είναι:

$$v(x,y,z)=-z \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \quad (2.71)$$

Γενικά, σ' ένα πρόβλημα 3D ελαστικότητας ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.73)$$

Βάσει των παραδοχών που προαναφέρθηκαν για τις πλάκες πρέπει να ισχύει: $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$, $\varepsilon_{zx} = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που δίνουν τις μετατοπίσεις w,u,v οι σχέσεις παραμορφώσεων- μετατοπίσεων γράφονται τελικά:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.74)$$

Οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων δίνονται από τις γνωστές σχέσεις για ιστροπικό ή ορθοτροπικό υλικό (Παπαδρακάκης, 2001):

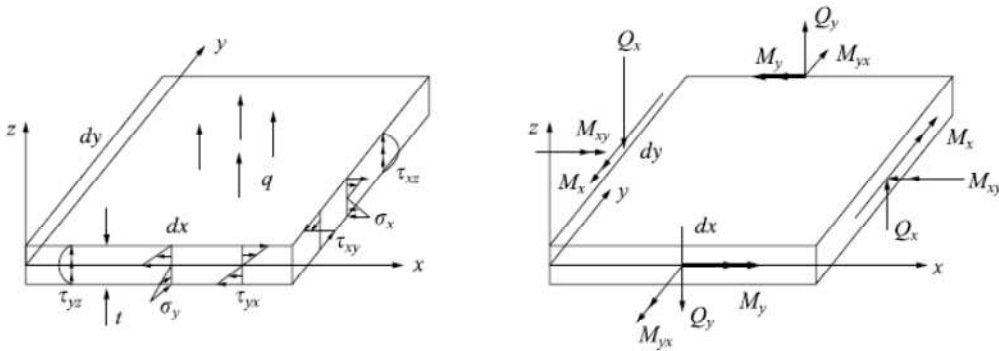
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{για ισοτροπικό}) \quad (2.75)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & -\frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ -\frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{για ορθοτροπικό}) \quad (2.76)$$

Οι πραγματικές τάσεις και παραμορφώσεις μεταβάλλονται γραμμικά κατά την έννοια του πάχους της πλάκας και ορίζονται από τις γνωστές σχέσεις (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005):

$$\sigma_{xx} = \frac{12M_x}{t^3}z, \sigma_{yy} = \frac{12M_y}{t^3}z, \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{t^3}z \quad (2.77)$$

όπου z η απόσταση από το μέσο επίπεδο της πλάκας, t το πάχος της πλάκας και M_x , M_y ροπές κάμψης κατά τους άξονες y και x , αντίστοιχα. Τέλος, M_{xy} η στρεπτική ροπή στο επίπεδο (x,y) .



Σχήμα 2.17: Τάσεις, δυνάμεις και ροπές σε διαφορικό στοιχείο της πλάκας (Logan, 2005).

Σύμφωνα με τη θεωρία των λεπτών πλακών, οι σχέσεις εντατικών μεγεθών- μετατοπίσεων είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz, \\ Q_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{zx} z dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} z dz \end{aligned} \quad (2.78)$$

Οι καμπτικές δυνάμεις Q_x και Q_y δεν μπορούν να υπολογιστούν από αυτές τις σχέσεις γιατί υποτέθηκε ότι $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$.

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τα μεγέθη σ_x , σ_y , τ_{xy} όπως υπολογίζονται με βάση τη μητρώα ελαστικότητας για ισοτροπικό ή ορθοτροπικό υλικό προκύπτει:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (D_x E_{xx} + D_y E_{yy}) z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(-D_x z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz \rightarrow$$

$$M_x = -D_x \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.79)$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (D_1 E_{xx} + D_y E_{yy}) z dz = -D_1 \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.80)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} 2D_{xy} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz = -2D_{xy} \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.81)$$

Θεωρώντας την ισορροπία ροπών σε στοιχειώδες τμήμα της πλάκας (βλ. **Σχήμα 2.17**), λαμβάνονται οι καμπτικές δυνάμεις:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}, Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.82)$$

Από την ισορροπία δυνάμεων της στοιχειώδους πλάκας προκύπτει (Παπαδρακάκης, 2001):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_{\varepsilon\xi} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -F_{\varepsilon\xi} \rightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-D_x \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_1 \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-D_1 \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-2D_{xy} \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -F_{\varepsilon\xi}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

και λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της πλάκας:

$$D_x \frac{t^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_1 + 4D_{xy} + D_y) \frac{t^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{t^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = F_{\varepsilon\xi}. \quad (2.84)$$

Αυτό που μπορεί να επισημανθεί για τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της πλάκας είναι ότι είναι τετάρτου βαθμού ως προς τις μετατοπίσεις ενώ οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν για τη 2Δ ελαστικότητα ή την 3Δ ελαστικότητα είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις μετατοπίσεις. Αυτό οφείλεται στις παραδοχές που έχουν γίνει για την απλοποίηση του προβλήματος της 3Δ ελαστικότητας σε πρόβλημα 2Δ ελαστικότητας (Παπαδρακάκης, 2001).

2.2.2.3 Αναλυτικές σχέσεις στη θεωρία παχιών πλακών

Οι διαφορές που προκύπτουν από τη θεωρία των λεπτών πλακών όπως έχει προαναφερθεί σχετίζονται με την εισαγωγή της διατμητικής παραμόρφωσης στις εξισώσεις του προβλήματος.

Οι μεταβλητές θ_x και θ_y δίνονται τώρα από τις σχέσεις (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005):

$$-\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y, \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \quad (2.85)$$

Οι ϕ_y, ϕ_x σχετίζονται με την εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση.

Επίσης τώρα πρέπει να συσχετιστούν οι διατμητικές παραμορφώσεις ϕ_y , ϕ_x με τις διατμητικές τάσεις και τις διατμητικές δυνάμεις και τελικά να τροποποιηθεί το μητρώο ελαστικότητας.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \frac{EtX}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Το X είναι ένας διορθωτικός συντελεστής οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του $2/3$ για περιπτώσεις χωρίς αντίσταση στη διατμητική παραμόρφωση και 1.0 σε περίπτωση που υπάρχει πλήρη αντίσταση και συνήθως λαμβάνεται ίσος με $5/6$ (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005), (Logan, 2005) (όπως θεωρήθηκε σε αντίστοιχη περίπτωση στην δοκό Timoshenko).

Τώρα, το διάνυσμα των παραμορφώσεων έχει 5 όρους αντί για 3, διότι ενσωματώνει και τους όρους της εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης. Στη βιβλιογραφία (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005), (Παπαδρακάκης, 2001), (Logan, 2005), το διάνυσμα των παραμορφώσεων εκφράζεται με όρους καμπυλοτήτων (κ) και διατμητικών παραμορφώσεων (ϕ) ως εξής:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

όπου: $\kappa_{xx} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$, $\kappa_{yy} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$, $\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$

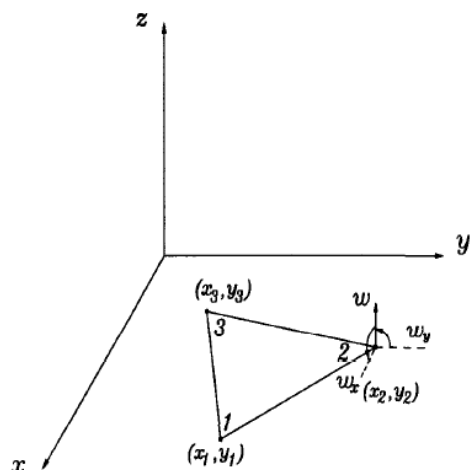
και, τελικά, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu)} & \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu)} & \frac{Et^3}{12(1-\nu)} & \frac{Et^3}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EtX}{12(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EtX}{12(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

2.2.2.4 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

α) Τριγωνικά στοιχεία πλάκας

Το τριγωνικό στοιχείο πλάκας είναι το απλούστερο στοιχείο πλάκας (βλ. Σχήμα 2.18). Έχει κόμβους στις τρεις κορυφές του και τρεις βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (w , Θ_x , Θ_y). Επειδή, συνολικά, το στοιχείο έχει 9 βαθμούς ελευθερίας, πρέπει το πολυώνυμο παρεμβολής να έχει 9 όρους. Παρατηρώντας το τρίγωνο του Pascal με τους όρους των πολυωνύμων (Σχήμα 2.19) φαίνεται ότι ένα πλήρες πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς x και y έχει 10 όρους, άρα πρέπει να παραλειφθεί ένας όρος.



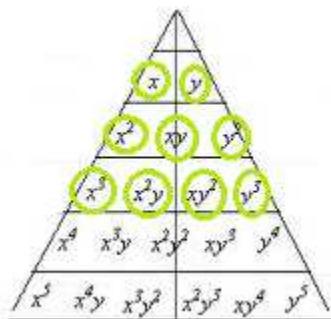
Σχήμα 2.18: Το τριγωνικό στοιχείο 9 βαθμών ελευθερίας (S.Rao, 2004).

Από τις παραδοχές που έγιναν για τις λεπτές πλάκες και διάφορα κριτήρια σύγκλισης που έχουν διατυπωθεί από ερευνητές, προκύπτουν οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί το πολυώνυμο παρεμβολής (S.Rao, 2004):

- Συνέχεια του βέλους κάμψης w αλλά και των παραγώγων του μεταξύ γειτονικών στοιχείων.
- Το πολυώνυμο παρεμβολής του w πρέπει να αναπαριστά την κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης. Γι' αυτό, το μοντέλο παρεμβολής πρέπει να περιλαμβάνει τις καταστάσεις σταθερών καμπυλοτήτων κ .
- Το πολυώνυμο παρεμβολής πρέπει να είναι γεωμετρικά ισότροπο.

Η επιλογή των σωστών όρων παίζει πολύ μεγάλη σημασία, ιδιαίτερα στα στοιχεία με πολλούς βαθμούς ελευθερίας που χρειάζονται πολυώνυμο μεγάλου βαθμού για συναρτήσεις παρεμβολής και συχνά πρέπει να παραλειφθούν όροι από τα πλήρη πολυώνυμα. Στη βιβλιογραφία επιλέγεται να συνδυαστούν δύο όροι ώστε να μην παραλειφθεί κανένας (βλ. και Σχήμα 2.19), άρα το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το:

$$w(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8(x^2 y + xy^2) + a_9 y^3 \quad (2.90)$$



Σχήμα 2.19: Τρίγωνο του Pascal. Οι όροι που χρησιμοποιούνται στη σχέση 2.90 είναι κυκλωμένοι.

Με τις κατάλληλες παραγωγίσεις προκύπτουν τα πολυώνυμα παρεμβολής για τα Θ_x, Θ_y :

$$\Theta_x(x,y) = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8(x^2 y + xy^2) + a_9 y^3 \quad (2.91)$$

$$\Theta_y(x,y) = -a_2 - 2a_4x - a_5y - 3a_7x^2 - a_8(2xy+y^2) \quad (2.92)$$

Οι σταθερές a_i προσδιορίζονται από τις συνθήκες που ισχύουν σε κάθε κόμβο i :

$$w(x_i, y_i) = w_i, \quad \theta_x(x_i, y_i) = \theta_{x,i}, \quad \theta_y(x_i, y_i) = \theta_{y,i} \quad (2.93)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή γραφή ως εξής:

$$\vec{q} = [g]\vec{a} \quad (2.94)$$

όπου q το διάνυσμα των τριών βαθμών ελευθερίας και g το μητρώο των συντελεστών που συνδέουν το q με τους συντελεστές a σύμφωνα με τη σχέση του πολυωνύμου παρεμβολής.

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y + xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 + 2xy & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy - y^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Γράφοντας το g για κάθε κόμβο (i,j,k) λαμβάνεται το ολικό μητρώο G που συνδέει όλες τις κομβικές μετατοπίσεις $(w_i, \theta_{x,i}, \theta_{y,i})$ με τους συντελεστές a_i :

$$\vec{q}^e = [G]\vec{a} \quad (2.96)$$

όπου

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i + x_i y_i^2 & y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 + 2x_i y_i & 3y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i - y_i^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -2x_k & -y_k & 0 & -3x_k^2 & -2x_k y_k - y_k^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Η σχέση παραμόρφωσης- μετατόπισης σε μητρωϊκή μορφή γράφεται:

$$\vec{\epsilon}(x,y) = -zB\vec{a} = BG\vec{q} \quad (2.98)$$

όπου:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται αναλυτικά από τη σχέση:

$$k = \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} B^T DB dz dA = [G^{-1}]^T \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} B^T DB dz dA [G^{-1}] \quad (2.100)$$

Στη βιβλιογραφία συναντώνται και στοιχεία με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας ή και περισσότερους κόμβους (Hrabok & Hrudey, 1984) όπως τα τριγωνικά στοιχεία με 10,12 ή 18 βαθμούς ελευθερίας, ακόμα και με 6 βαθμούς ελευθερίας (στοιχείο του Morley) . Περισσότερα σχόλια για τα τριγωνικά στοιχεία πλάκας θα γίνουν σε επόμενη ενότητα.

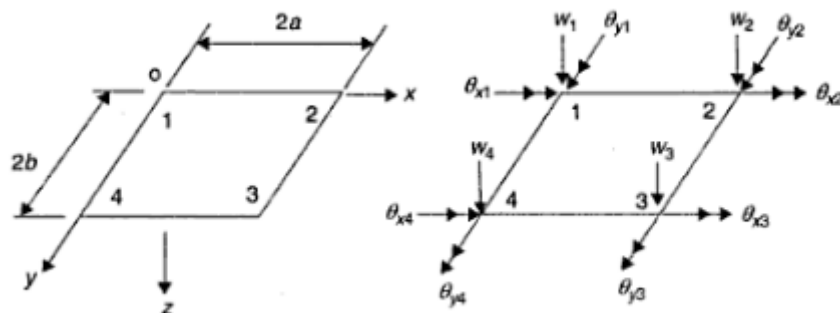
Ο Hughes (Hughes, 2000) διεξήγαγε διάφορες δοκιμές χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία. Ένα βασικό συμπέρασμα ήταν ότι πλέγματα όπως του τύπου A (τρίγωνα σε σχήμα

«\» μέσα σε τετράπλευρα) και του τύπου Β(τρίγωνα σε σχήμα «/» μέσα σε τετράπλευρα) παρουσιάζουν αρκετό σφάλμα όταν χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση για το μητρώο δυσκαμψίας. Από την άλλη, τα πλέγματα με τρίγωνα σε σχήμα Χ παρουσιάζουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

β) Ορθογωνικά στοιχεία πλάκας

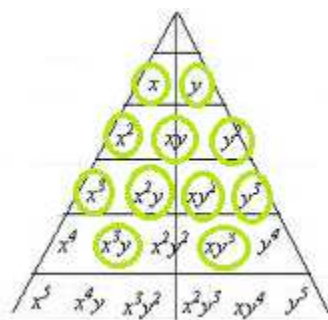
Το απλούστερο ορθογωνικό στοιχείο πλάκας έχει 4 κόμβους (στις κορυφές του) με 3 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο (12 βαθμοί ελευθερίας-βλ. Σχήμα 2.20). Επομένως, πρέπει να επιλεγεί ένα πολυώνυμο παρεμβολής με 12 όρους:

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (2.101)$$



Σχήμα 2.20: Το ορθογωνικό στοιχείο πλάκας.

Η έκφραση αυτή είναι ένα μη-πλήρες τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο όπως φαίνεται και από το τρίγωνο του Pascal (Σχήμα 2.21). Η συνάρτηση αυτή είναι πλήρες τρίτοβάθμιο πολυώνυμο (10 όροι) και πρέπει να περιλάβει και άλλους δύο όρους. Η επιλογή των όρων x^3y , xy^3 εξασφαλίζει την συνέχεια στις μετατοπίσεις κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων. Εάν είχαν επιλεγεί οι όροι x^4 , y^4 , δεν θα υπήρχε αυτή η συνέχεια μεταξύ των στοιχείων. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη βασική διαφορική εξίσωση στο αφόρτιστο τμήμα της πλάκας. Επιπλέον η έκφραση αυτή επιτρέπει την κίνηση στερεού σώματος και σταθερής παραμόρφωσης (Logan, 2005).



Σχήμα 2.21: Τρίγωνο του Πασκάλ. Οι όροι που χρησιμοποιούνται στο πολυώνυμο της σχέσης 2.101 είναι κυκλωμένοι.

Η ανωτέρω έκφραση έχει επιπλέον δύο σαφή πλεονεκτήματα: Είναι συμμετρική ως προς x και y κατά μήκος ευθειών με σταθερό x και y , το w δίνεται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού που μπορεί να προσδιορισθεί μονοσήμαντα. Όμως, οι κλίσεις $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες κατά μήκος των συνόρων του στοιχείου. Άρα, η κάθετη κλίση εμφανίζει ασυνέχεια κατά τη μετάβαση από το ένα στοιχείο στο άλλο. Αλλά οι δύο κλίσεις που διατίθενται στους κόμβους της πλευράς του στοιχείου δεν επαρκούν για τον πλήρη προσδιορισμό των τεσσάρων αγνώστων συντελεστών του κυβικού πολυωνύμου και επομένως η προσέγγιση που ορίζεται από την παραπάνω σχέση παρεμβολής είναι γενικά ασύμμορφη (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Οι συντελεστές a_i υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως στο τριγωνικό στοιχείο.

Το μητρώο g των συντελεστών που συνδέουν το q με τους συντελεστές a σύμφωνα με τη σχέση του πολυωνύμου παρεμβολής είναι τώρα το:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

και με παρόμοιο τρόπο εξάγεται το μητρώο G .

Η σχέση παραμόρφωσης- μετατόπισης σε μητρωϊκή μορφή γράφεται κατά τα γνωστά:

$$\vec{\varepsilon}(x, y) = -zB\vec{a} = BG\vec{q} \quad (2.103)$$

όπου

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6x^2 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται αναλυτικά από τη σχέση:

$$k = \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} B^T DB dz dA \quad (2.105)$$

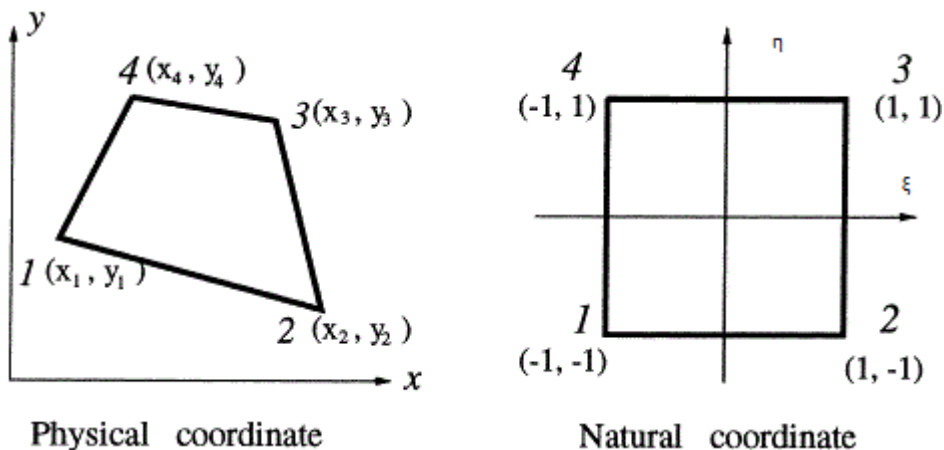
Όπως για τα τριγωνικά στοιχεία πλάκας έτσι και για τα ορθογωνικά στη βιβλιογραφία συναντώνται στοιχεία με περισσότερες παραμέτρους ή κόμβους όπως τα σύμμορφα στοιχεία με 16,24 ή 36 κομβικές παραμέτρους κτλ. Στοιχεία με πολλές παραμέτρους είναι σύμμορφα και μπορούν να δώσουν καλή σύγκλιση όμως μπορεί να μην μπορούν να εκφραστούν με αυτά τα στοιχεία με ακρίβεια οι συνθήκες συνέχειας όταν υπάρχουν απότομες μεταβολές στο πάχος της πλάκας ή στις ιδιότητες του υλικού (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Μια παρατήρηση που μπορεί να γίνει σχετικά με κάποια στοιχεία που χρησιμοποιούν περισσότερες κομβικές παραμέτρους είναι ότι δεν είναι κατάλληλη γενικά η χρήση όρων που δεν αναπαριστούν κάποια φυσική ποσότητα που σχετίζεται με το πρόβλημα π.χ. η χρήση του όρου $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ως κομβική μεταβλητή.

γ) Ισοπαραμετρικά στοιχεία πλάκας

Μια άλλη κατηγορία πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται κυρίως στην περίπτωση παχίων πλακών αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση λεπτών πλακών (και προτιμάται για πλάκες μη-ορθογωνικού σχήματος) είναι τα ισοπαραμετρικά στοιχεία πλάκας. Θα εξεταστεί το τετρακομβικό ισοπαραμετρικό στοιχείο. Περισσότερα θεωρητικά ζητήματα για τις κατηγορίες ισοπαραμετρικών στοιχείων αναφέρονται σε επόμενη ενότητα. Εδώ θα παρουσιαστεί την χρήση του τετρακομβικού ισοπαραμετρικού στοιχείου σ' ένα πρόβλημα πλάκας.

Η βασική ιδέα των ισοπαραμετρικών στοιχείων είναι ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου στην πλάκα αλλά και οι μεταβλητές του προβλήματος εκφράζονται με τον ίδιο τρόπο. Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία αναπτύχθηκαν για να παρασταθούν οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου μέσα σε κάθε στοιχείο σύμφωνα με τον τρόπο που ορίστηκαν οι παραμορφώσεις συναρτήσεων των κομβικών παραμέτρων (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005). Εισάγεται ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων ξ, η (βλ. **Σχήμα 2.22**) στο οποίο εκφράζονται αρχικά οι συναρτήσεις μορφής και, στη συνέχεια, μέσω ενός Ιακωβιανού μητρώου συνδέονται οι εκφράσεις αυτές με τις συντεταγμένες x, y .



Σχήμα 2.22: Ισοπαραμετρικό τετρακομβικό πεπερασμένο στοιχείο- Αριστερά: το στοιχείο αυτό στο σύστημα συντεταγμένων x, y -**Δεξιά:** το στοιχείο αυτό στο σύστημα συντεταγμένων ξ, η .

Με τη διαδικασία αυτή ένα τυπικό αρχικό στοιχείο (ή **γενεσιουργό** στοιχείο) που αναφέρεται σε ένα σύστημα φυσικών ή τοπικών συντεταγμένων μπορεί να απεικονισθεί με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων σχήματος σε ένα **παράγωγο** στοιχείο στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Οι συντεταγμένες ενός σημείου x, y γράφονται στη μορφή:

$$x = \sum_{i=1}^4 v_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 v_i y_i \tag{2.106}$$

όπου: v_i συναρτήσεις μορφής.

Οι βαθμοί ελευθερίας μπορούν να γραφούν με τον ίδιο τρόπο:

Κεφάλαιο 2-Θεωρία πεπερασμένων στοιχείων

$$w = \sum_{i=1}^4 v_i x_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 v_i \theta_{x_i}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 v_i \theta_{y_i} \quad (2.107)$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων μορφής σε φυσικές συντεταγμένες συνδέονται με τις παραγώγους των συναρτήσεων μορφής μέσω της Ιακωβιανής:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_4}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_4}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} & \frac{\partial v_2}{\partial \xi} & \frac{\partial v_3}{\partial \xi} & \frac{\partial v_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \eta} & \frac{\partial v_2}{\partial \eta} & \frac{\partial v_3}{\partial \eta} & \frac{\partial v_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Κατά τα γνωστά, το διάνυσμα των παραμορφώσεων (που όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για παχιά πλάκα έχει πέντε όρους αντί για τρεις) δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\varepsilon}(x, y) = -zB\vec{a} = BG\vec{q} \quad (2.109)$$

όπου B_i ($i=1,2,3,4$):

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial v_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & v_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} & -v_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

Ισχύει η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων: $\sigma = D\varepsilon$ ή $\sigma = DBq$ όπου το μητρώο D είναι αυτό που χρησιμοποιείται για τις παχιές πλάκες.

Μετά τον πολλαπλασιασμό του μητρώου D με το μητρώο B προκύπτει:

$$DB_i = \frac{Et}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\nu t^2}{1-\nu} \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{-t^2}{1-\nu} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{-t^2}{1-\nu} \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{-\nu t^2}{1-\nu} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{-t^2}{2} \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{-t^2}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ 6X \frac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & 6X v_i \\ 6X \frac{\partial v_i}{\partial y} & -6X v_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

για $i=1,2,3,4$.

Αν διαχωριστούν οι καμπτικοί από τους διατμητικούς όρους στη παραπάνω σχέση θα ληφθεί:

$$DB_i = \frac{Et}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\nu t^2 \partial v_i}{1-\nu \partial y} & \frac{-t^2 \partial v_i}{1-\nu \partial x} \\ 0 & \frac{-t^2 \partial v_i}{1-\nu \partial y} & \frac{-\nu t^2 \partial v_i}{1-\nu \partial x} \\ 0 & \frac{-t^2 \partial v_i}{2 \partial y} & \frac{-t^2 \partial v_i}{2 \partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & v_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} & v_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

Για τον υπολογισμό των μητρώων DB_i προτιμάται η αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Gauss και, μάλιστα, για να ξεπεραστεί το πρόβλημα της «υπερακαμψίας» (shear locking), θα εφαρμοστεί η μέθοδος της «περιορισμένης επιλεκτικής ολοκλήρωσης» δηλαδή το μητρώο των καμπτικών όρων θα υπολογιστεί με χρήση μεθόδου ολοκλήρωσης με 2x2 σημεία και το μητρώο των διατμητικών όρων θα υπολογιστεί με χρήση μεθόδου ολοκλήρωσης με 1x1 σημεία (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

Έπειτα, μπορεί να υπολογιστεί το μητρώο δυσκαμψίας με την γνωστή σχέση:

$$k = \int_A \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} B^T DB dz dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB |J| d\xi d\eta \quad (2.113)$$

Πριν παρουσιαστεί η επόμενη ενότητα, καλό θα ήταν να αναφερθεί ότι μια επισκόπηση όλων των πεπερασμένων στοιχείων πλάκας που είχαν αναπτυχθεί μέχρι τις αρχές τις δεκαετίας του 1980 περιλαμβάνεται στην εργασία των M.M.Hrabok και T.M.Hrudey. (Hrabok & Hrudey, 1984).

2.2.2.5 Παρατηρήσεις για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα πλακών

Γενικά, δεν υπάρχει κάποιο είδος πεπερασμένου στοιχείου τύπου πλάκας στη βιβλιογραφία το οποίο να παρέχει αποδεκτές λύσεις για όλα τα είδη των φορτίων, των οριακών συνθηκών και των υλικών, για διάφορους λόγους. Βέβαια, λόγω της μεγάλης ποικιλίας πεπερασμένων στοιχείων που αναφέρονται είναι δυνατόν να επιτευχθούν ικανοποιητικά αποτελέσματα στις αναλύσεις με στοιχεία πλάκας. Στη συνέχεια, θα αναφερθούν διάφορες παρατηρήσεις που αφορούν την χρήση στοιχείων τύπου πλάκας και οι οποίες θα φανούν χρήσιμες όταν θα γραφούν οι κώδικες για την ανάλυση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων των κατασκευών που θα εξεταστούν στην παρούσα εργασία.

Η χρήση τρικομβικών τριγωνικών στοιχείων πλάκας μπορεί να εμφανίσει σοβαρό πρόβλημα shear-locking υπό συνθήκες. Σε τέτοια περίπτωση μπορεί να χρειαστεί ένας διαφορετικός ορισμός του παραμορφωσιακού πεδίου εγκάρσιας διάτμησης για διατηρηθεί ο βαθμός (rank) του συστήματος (Hughes, 2000).

Χρειάζεται προσοχή κατά την επιβολή οριακών συνθηκών όταν χρησιμοποιείται η θεωρία παχιών πλακών σε προβλήματα που χρησιμοποιούνταν προηγουμένως η θεωρία λεπτών πλακών, κυρίως στην περίπτωση απλής στήριξης (simply supported). Σε ορισμένες περιπτώσεις συμβαίνουν παράδοξα φαινόμενα και δεν ωφελεί πάντα η επιβολή περισσότερων περιορισμών για να εξαλειφθούν (Hughes, 2000).

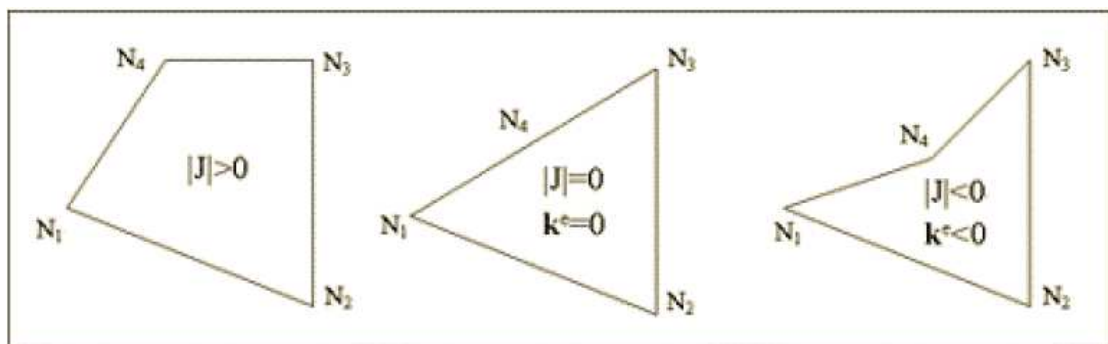
Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούνται κάποια είδη πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι η ορίζουσα του μητρώου ακαμψίας γίνεται σχεδόν μηδενική (singularity – rank deficient matrix). Αυτό μπορεί να εμφανιστεί σε στοιχεία που ενώ αντιμετωπίζουν με επιτυχία το πρόβλημα του shear-locking, εμφανίζουν τρόπους μηδενικής ενέργειας (zero-energy modes) που σχετίζονται με τους τρόπους (modes) που αντιστοιχούν στην κίνηση στερεού σώματος (rigid body motion). Το αποτέλεσμα θα είναι ταλαντώσεις ή στρεβλή μορφή στην παραμορφωμένη πλάκα. Το πρόβλημα μπορεί να εξαλειφθεί ως ένα βαθμό με χρήση άλλου πλέγματος ή άλλου σχήματος αριθμητικής ολοκλήρωσης (όταν χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση). Σε ορισμένες περιπτώσεις το μητρώο δυσκαμψίας μετά την επιβολή των οριακών συνθηκών παύει εντελώς να είναι rank-deficient και γίνεται θετικά ορισμένο όπως αναμένεται, με αποτέλεσμα την εξάλειψη των zero-energy modes (Hughes, 2000).

Το είδος και το σχήμα των πεπερασμένων στοιχείων πλάκας επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την «απόδοση» του μητρώου δυσκαμψίας και την παρεμβολή τάσεων και παραμορφώσεων σε κάθε σημείο.

Όπως έχει προαναφερθεί, όταν ο λόγος πάχους προς μήκος είναι μικρότερος από 0.1 συνίσταται να χρησιμοποιούνται στοιχεία πλάκας που βασίζονται στην θεωρία λεπτών πλακών. Αυτό επιβεβαιώνεται και από δοκιμές όπου το σφάλμα που παρουσιάζουν στοιχεία λεπτών πλακών είναι μεγαλύτερο όταν ο λόγος πάχους προς μήκος είναι πάνω από 0.1.

Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (CSPFEA), υπάρχουν πέντε βασικοί παράγοντες σχετικοί με το σχήμα των πεπερασμένων στοιχείων και επιδρούν σημαντικά στην ακρίβεια της επίλυσης. Εάν οι παράγοντες αυτοί είναι σε μη επιτρεπτά όρια μπορεί να εμφανιστεί το φαινόμενο του locking. Τότε η δομή γίνεται πολύ δύσκαμπτη (stiff) λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας που εμφανίζεται σε μια περιοχή.

Ο πρώτος παράγοντας είναι σχετικός με την **ιακωβιανή ορίζουσα**, που όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιείται στα ισοπαραμετρικά στοιχεία για τον μετασχηματισμό των συναρτήσεων μορφής μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται.

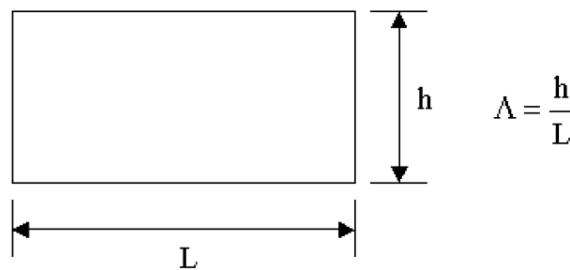


Σχήμα 2.23: Συσχέτιση μεταξύ σχήματος πεπερασμένου στοιχείου και Ιακωβιανής (CSPFEA).

Πρακτικά, η Ιακωβιανή ορίζουσα μας δίνει το λόγο της επιφάνειας του γενεσιουργού πεπερασμένου στοιχείου προς το εμβαδόν του παράγωγου στοιχείου. Το τετρακομβικό

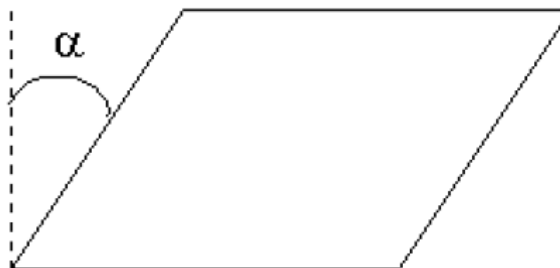
ισοπαραμετρικό στοιχείο πρέπει να είναι κυρτό (βλ. **Σχήμα 2.23**). Εάν το τετρακομβικό στοιχείο δεν είναι κυρτό, η Ιακωβιανή ορίζουσα προκύπτει αρνητική ή μηδενική και, κατά συνέπεια, το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου είναι μηδενικό. Ο λόγος των ανώτερων τιμών προς τις κατώτερες τιμές Ιακωβιανής πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $|J|_{\max} / |J|_{\min} \leq 2$. Γενικά, όσο οι εσωτερικές γωνίες απομακρύνονται από τις 90° τόσο μεγαλώνει η τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας (CSPFEA).

Ο δεύτερος παράγοντας είναι το aspect ratio («**λόγος διαμήκους**») του πεπερασμένου στοιχείου, δηλαδή ο λόγος του μήκους της μικρότερης πλευράς προς το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς (βλ. **Σχήμα 2.24**). Το καλύτερο σχήμα θεωρητικά, είναι ένα τετράγωνο με λόγο 1 και όσο ο λόγος είναι μικρότερος από το 1 τόσο πιο «άσχημο» θεωρείται το πεπερασμένο στοιχείο. Γενικά όμως όταν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια στις τάσεις το aspect ratio δεν πρέπει να είναι πάνω από 1/3 και όταν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στις μετατοπίσεις το aspect ratio δεν πρέπει να είναι πάνω από 1/5. Τα αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης είναι πιο ευαίσθητα στην αλλαγή του aspect ratio απ' ότι τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης (CSPFEA).



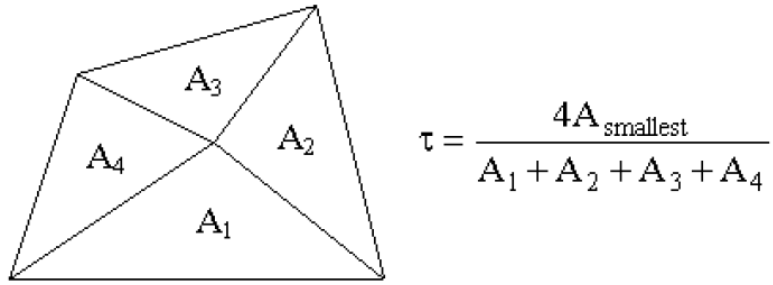
Σχήμα 2.24: Aspect ratio πεπερασμένου στοιχείου (CSPFEA).

Ο τρίτος παράγοντας είναι η γωνία απόκλισης (skew angle) α που προσδιορίζει την γωνία απόκλισης ενός τετράπλευρου από το ορθογώνιο (βλ. **Σχήμα 2.25**). Αν και, θεωρητικά, το καλύτερο σχήμα θεωρείται ότι είναι το τετράγωνο ($\alpha=0$) θεωρείται καλό οι εσωτερικές γωνίες του στοιχείου να είναι από 45° έως 135° (CSPFEA).

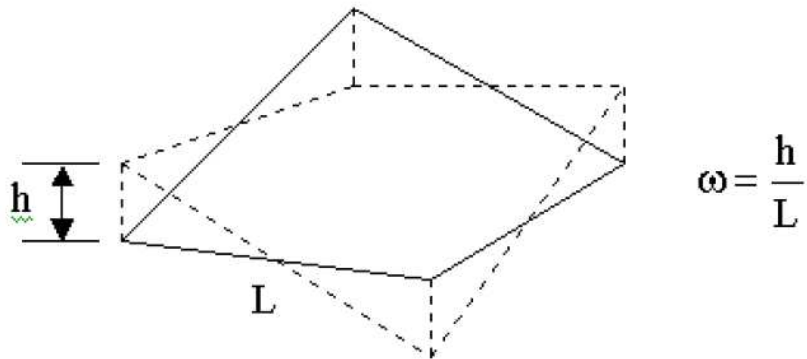


Σχήμα 2.25: Γωνία απόκλισης (CSPFEA).

Ο τέταρτος παράγοντας ονομάζεται λόγος εκλέπτυνσης (taper) και αναπαριστά την γεωμετρική απόκλιση της μορφής ενός στοιχείου από το ορθογώνιο (βλ. **Σχήμα 2.26**). Ο τελευταίος παράγοντας ονομάζεται warping και αφορά την απόκλιση των κόμβων από το επίπεδο στην περίπτωση καμπύλων επιφανειών (βλ. **Σχήμα 2.27**) (CSPFEA).



Σχήμα 2.26: Λόγος εκλέπτυνσης (taper) (CSPFEA).



Σχήμα 2.27: Warping (CSPFEA).

Τέλος, όπως έχει επισημανθεί και προηγουμένως η επιλογή κατάλληλου είδους πεπερασμένου στοιχείου πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή για πλάκες μεταβλητού πάχους ή διαφορετικών υλικών ώστε να μπορούν να εκφραστούν με ακρίβεια οι συνθήκες συνέχειας (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005).

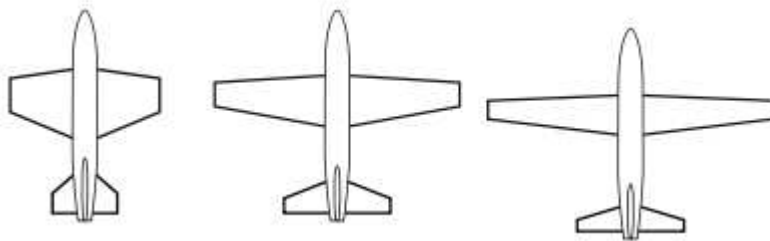
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μοντελοποίηση πτέρυγας και αποτελέσματα επίλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

3.1 Μοντελοποίηση της πτέρυγας

Στην ενότητα αυτή θα γίνει αρχικά μια συνοπτική παρουσίαση των ειδών των πτερύγων που απαντώνται σε διάφορα αεροσκάφη καθώς και των μερών από τα οποία αποτελείται συνήθως μια πτέρυγα. Τέλος θα παρουσιαστούν ορισμένα μοντέλα πτέρυγας που έχουν χρησιμοποιηθεί για δομική ανάλυση και θα γίνει αναφορά στα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία.

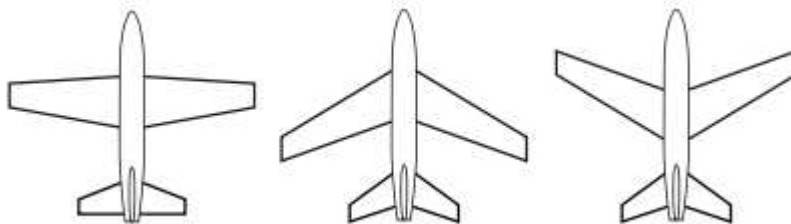
3.1.1 Είδη πτερύγων

Ανάλογα με την μορφή της επιφάνειάς της η πτέρυγα μπορεί να έχει μικρό aspect ratio (πιο αποδοτική δομικά ειδικά για αεροσκάφη μεγάλων ταχυτήτων), μέτριο aspect ratio (γενικής χρήσης αεροσκάφη) ή μεγάλο aspect ratio (πιο αποδοτικά από αεροδυναμικής άποψης, χρησιμοποιείται κυρίως σε υποηχητικά αεροσκάφη) (WIK).



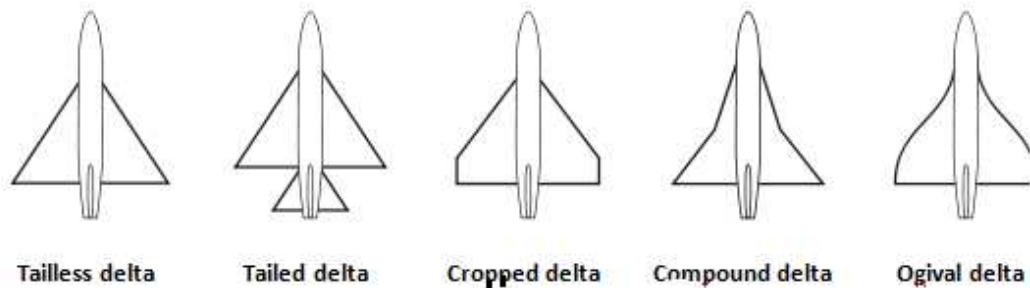
Σχήμα 3.1: Αεροπλάνα με διαφορετικά aspect ratio (α) αριστερά: μικρό aspect ratio, (β) κέντρο: μέτριο aspect ratio, (γ) μεγάλο aspect ratio (WIK).

Ανάλογα με την κλίση της πτέρυγας, η πτέρυγα μπορεί να είναι: ισοκλινής (αποδοτική για χαμηλές ταχύτητες), οπισθοκλινής (παρουσιάζει μικρότερη αντίσταση σε διηχητικές ταχύτητες) ή εμπροσθοκλινής.



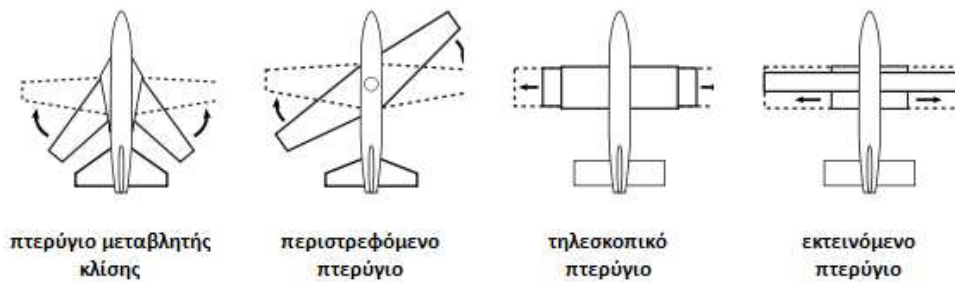
Σχήμα 3.2: Ισοκλινές, Οπισθοκλινές και Εμπροσθοκλινές αεροσκάφος (WIK).

Μια άλλη παραλλαγή πτέρυγας είναι η πτέρυγα σε σχήμα δέλτα η οποία έχει κλίση στην ακμή προσβολής και είναι ισοκλινής στην ακμή εκφυγής. Σε αυτή την παραλλαγή μπορεί να εμφανιστούν προβλήματα αεροδυναμικής αστάθειας. Ορισμένοι από τους σχηματισμούς που μπορεί να έχει μια πτέρυγα σε σχήμα δέλτα εικονίζονται στο σχήμα 3.5 (WIK) :



Σχήμα 3.3: Οι διάφοροι σχηματισμοί πτέρυγας σε σχήμα δέλτα (WIK).

Τέλος, οι πτέρυγες μεταβλητής γεωμετρίας, που μπορούν να αλλάζουν μορφή κατά την διάρκεια της πτήσης συναντώνται συνήθως σε μία από τις 4 παραλλαγές που εικονίζονται στο σχήμα 3.6 (WIK):



Σχήμα 3.4: Είδη πτερυγών με μεταβλητή γεωμετρία (WIK).

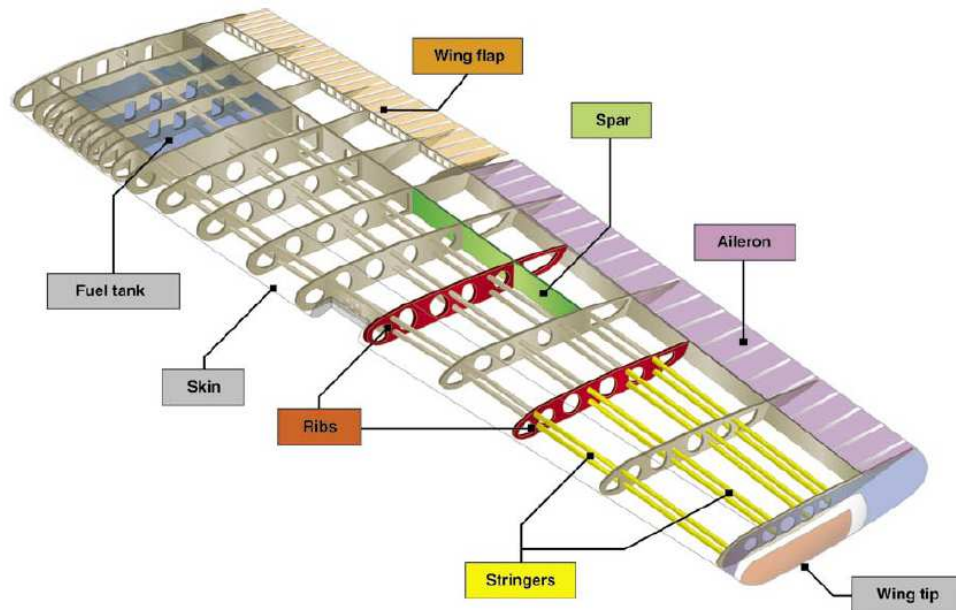
3.1.2 Τα μέρη της πτέρυγας

Τα βασικότερα μέρη σε μια τυπική πτέρυγα αεροσκάφους όπως εικονίζονται στο **Σχήμα 3.5** είναι τα εξής:

- Πτερύγιο καμπυλότητας (wing flap ή flap):** Το πτερύγιο καμπυλότητας ορίζεται ως ένα αρθρωμένο ή περιστρεφόμενο και ενίοτε επεκτάσιμο τμήμα ενός φτερού αεροπλάνου που χρησιμοποιείται για να μεταβάλλει κατάλληλα την άνωση και την αντίσταση από τον αέρα για είναι εφικτή η προσγείωση με μειωμένη ταχύτητα (Merriam-Webster). Εκτεινώντας το πτερύγιο καμπυλότητας αλλάζει η καμπυλότητα της αεροτομής του πτερυγίου και αυξάνεται η γωνία καθόδου για την προσγείωση. Η έκταση του πτερυγίου καμπυλότητας αυξάνει την άνωση στην πτέρυγα, επιτρέποντας στο αεροσκάφος να παράγει άνωση σε μικρότερη ταχύτητα αλλά παράλληλα αυξάνει και την οπισθέλκουσα δύναμη (FAA, 2008). Το πτερύγιο καμπυλότητας μπορεί να είναι μερικώς εκτεταμένο και κατά την απογείωση ιδίως για απογείωση σε μικρό διάδρομο

απογείωσης, με μικρότερο ρυθμό ανόδου όμως. Έχουν σχεδιαστεί διάφορα είδη πτερυγίων καμπυλότητας.

- **Διαμήκης δοκός πτέρυγας (spar):** Η διαμήκης δοκός πτέρυγας ορίζεται ως ένα κύριο πλευρικό μέλος του πλαισίου της πτέρυγας του αεροπλάνου (Merriam-Webster). Σε αεροσκάφη σταθερής πτέρυγας η διαμήκης δοκός είναι συνήθως το κύριο δομικό μέλος της πτέρυγας διατρέχοντάς την καθ' όλο το εκπέτασμά της (FAA, 2008). Στην διαμήκη δοκό συνδέονται άλλα μέλη της πτέρυγας όπως οι νευρώσεις (ribs) και παραλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της φόρτισης της πτέρυγας τόσο από το ίδιο βάρος της όσο και από τα στατικά και δυναμικά αεροδυναμικά φορτία.
- **Πηδάλιο κλίσεως (aileron):** Το ηδάλιο κλίσεως είναι ένα πτερύγιο αρθρωμένο στην οπίσθια ακμή της πτέρυγας του αεροσκάφους που παρέχει πλευρικό έλεγχο όπως στις περιπτώσεις του bank και του roll (FRE). Τα ηδάλια κλίσεως στις δύο πτέρυγες συνήθως είναι διασυνδεδεμένα ώστε όταν το ένα κάνει μια κίνηση προς τα πάνω, το άλλο να κινείται προς τα κάτω. Έτσι το ηδάλιο που κινείται προς τα κάτω αυξάνει την άνωση στην πτέρυγά του και το άλλο ηδάλιο μειώνει την άνωση στην άλλη πτέρυγα και το αεροσκάφος στρέφεται γύρω από τον διαμήκη άξονά του, αλλάζοντας την διεύθυνσή του (WIK).
- **Επικάλυψη πτέρυγας (skin):** Η επικάλυψη της πτέρυγας του αεροσκάφους είναι ένα λεπτό στρώμα που καλύπτει εξωτερικά την πτέρυγα (WIK). Η επικάλυψη της πτέρυγας είναι συνήθως κατασκευασμένη από κράμα αλουμινίου.
- **Νεύρωση (rib):** Η νέυρωση (ενίσχυση) είναι ένα από τα πολλά εγκάρσια κομμάτια που δίνουν στην πτέρυγα του αεροσκάφους το σχήμα της και συμβάλλουν στην αύξηση της αντοχής της (FRE). Οι νευρώσεις, κατ' αναλογία με τα πλευρά του ανθρώπινου σκελετού (ribs στα αγγλικά) συνδέονται στην διαμήκη δοκό και δημιουργούν μια δομή σκελετού στην πτέρυγα. Η επικάλυψη της πτέρυγας παίρνει το σχήμα αυτού του σκελετού (FAA, 2008).
- **Δοκίδα επικαλύψεως (stringer ή longeron):** Οι δοκίδες επικαλύψεως είναι μέλη που συνεισφέρουν στην δυσκαμψία της πτέρυγας ή και στην στερέωση της επικάλυψης της πτέρυγας. Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.5**, οι δοκίδες επικαλύψεως διατρέχουν την πτέρυγα κατά το εκπέτασμά της και συνδέονται με τις νευρώσεις (WIK).
- **Ακροπτερύγιο (wing tip):** Το ακροπτερύγιο είναι το άκρο της πτέρυγας του αεροσκάφους. Υπάρχει μια ποικιλία διαφορετικών σχημάτων που μπορεί να λάβει το ακροπτερύγιο, το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο στην δημιουργία της οπισθέλκουσας δύναμης και των στροβίλων που επάγονται από το ακροπτερύγιο (wingtip vortices).

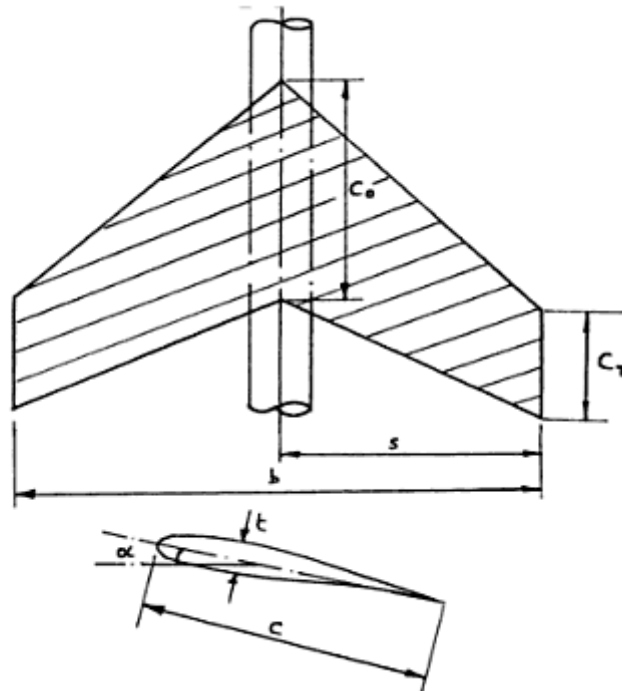


Σχήμα 3.5: Τα μέρη μιας πτέρυγας (FAA, 2008).

Στη συνέχεια θα παρατεθούν μερικοί βασικοί ορισμοί γεωμετρικών μεγεθών σχετικών με την πτέρυγα (Fielding, 1999) (βλ. Σχήμα 3.6):

- **b** εκπέτασμα πτέρυγας (η μέγιστη απόσταση από το ένα φτερό στο άλλο)
- **s** ημι-εκπέτασμα πτέρυγας ($b/2$)
- **C_0** χορδή βάσης του περυγίου (root chord)
- **C_T** χορδή ακροπτερυγίου
- **S** επιφάνεια φτερού
- **λ** ο λόγος C_T/C_0 (wing taper ratio)
- **t/c** λόγος πάχους προς χορδή (το μέγιστο τοπικό πάχος διαιρεμένο με το τοπικό μήκος χορδής)
- **c** - S/b (γεωμετρική χορδή πτέρυγας)
- **A** b^2/S (το aspect ratio- «λόγος διαμήκους» της πτέρυγας)

- α γωνία πρόσπτωσης στην αεροτομή



Σχήμα 3.6: Τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη μιας πτέρυγας αεροσκάφους (Fielding, 1999).

Το aspect ratio («λόγος διαμήκους») χαρακτηρίζεται εξαιρετικά χαμηλό έως χαμηλό για τιμές από 1.5 έως 6 περίπου ενώ πτέρυγες με aspect ratio πάνω από 10 έχουν υψηλό aspect ratio.

Το wing taper (εκλέπτυνση πτέρυγας) λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Συνήθως, τιμές από 0.3 έως 0.5 είναι συνηθισμένες για υποηχητικά αεροσκάφη ενώ σε πτέρυγες με κλίση είναι συνηθισμένη η τιμή 0.2.

Το εκπέτασμα της πτέρυγας ποικίλλει προφανώς ανάλογα με τον τύπο του αεροσκάφους. Έτσι για παράδειγμα μεγάλα αεροσκάφη όπως το Airbus A380 έχουν πάνω από 150 μέτρα εκπέτασμα (261.8 μέτρα το Airbus A380), τα Boeing από 100-200 μέτρα και τα μικρά ιδιωτικά αεροσκάφη όπως το Cessna 30-50 μέτρα (FSX).

3.1.3 Μοντελοποίηση της πτέρυγας κατά τη δομική ανάλυση

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν αρχικά ορισμένες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο που μοντελοποιείται συνήθως η πτέρυγα του αεροσκάφους κατά τη **δομική ανάλυση** με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και, στη συνέχεια, θα σχολιαστούν τα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία.

Κατά τη μοντελοποίηση μιας πτέρυγας αεροσκάφους όπως γενικά και για κάθε άλλη αεροπορική ή μη-δομή που είναι επιθυμητό να μελετηθεί υπάρχουν μια σειρά από βασικές επιλογές που πρέπει να κάνει ο ερευνητής ώστε να μοντελοποιήσει την κατασκευή με τον πιο αποδοτικό, για την κάθε περίπτωση, τρόπο.

Μία από τις βασικές αυτές επιλογές είναι η επιλογή του κατάλληλου τύπου πεπερασμένου στοιχείου που αρμόζει κατάλληλα στην κάθε περίπτωση ανάλογα με το πόσο λεπτομερής

θα είναι η δομική ανάλυση. Σε ορισμένες περιπτώσεις όπως η μοντελοποίηση της ατράκτου είναι σχεδόν προφανές ότι θα επιλεγούν στοιχεία τύπου κελύφους στις περισσότερες περιπτώσεις. Σε πολύπλοκες κατασκευές όμως πρέπει να γίνουν οι κατάλληλοι συμβιβασμοί (π.χ. μεταξύ ακρίβειας των αποτελεσμάτων και υπολογιστικού κόστους) πριν την επιλογή του είδους του πεπερασμένου στοιχείου.

Σε γενικές γραμμές, τα στοιχεία κελύφους προτιμώνται σε σχέση με τα 3D στοιχεία σε περιπτώσεις όπως όταν η κατασκευή έχει τη μορφή κελύφους, το πάχος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις αλλά και για λόγους υπολογιστικού κόστους. Από την άλλη, χρησιμοποιούνται 3D πεπερασμένα στοιχεία όταν η κατασκευή έχει σημαντικό πάχος, όταν η κατανομή των τάσεων κατά το πάχος είναι σημαντική και όταν το υλικό είναι σύνθετο ή μη ομογενές (Taig, 1996).

Ένα παρόμοιο δίλημμα παρουσιάζεται για τη χρήση επίπεδων στοιχείων μεμβράνης και κελύφους. Το στοιχείο τύπου μεμβράνης οδηγεί σε μικρότερο υπολογιστικό φόρτο αλλά μπορεί να δώσει ορθά αποτελέσματα μόνο σε περίπτωση μεμβρανικών φορτίσεων ενώ το στοιχείο κελύφους αναπαριστά καλύτερα τις καμπύλες επιφάνειες.

Ένας άλλος παράγοντας που λαμβάνεται υπόψη στη μοντελοποίηση είναι η εκμετάλλευση της συμμετρίας που εμφανίζεται σε μια κατασκευή. Για παράδειγμα, η άτρακτος του αεροσκάφους είναι κυλινδρικού σχήματος και άρα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα που περνάει από τα κέντρα των δύο βάσεων του κυλίνδρου. Λαμβάνοντας υπόψη την συμμετρία της κατασκευής και θέτοντας τις κατάλληλες (πρόσθετες) οριακές συνθήκες συμμετρίας είναι δυνατόν να απλοποιηθεί σημαντικά το πρόβλημα και να ελαχιστοποιηθεί ο υπολογιστικός χρόνος.

Όσον αφορά τη λεπτομέρεια με την οποία γίνεται η μοντελοποίηση, υπάρχουν δύο αντικρουόμενες στρατηγικές μοντελοποίησης: η υπέρ-μοντελοποίηση και η υπό-μοντελοποίηση (Taig, 1996).

Στην υπερμοντελοποίηση δημιουργούνται λεπτομερή πλέγματα με εκλέπτυνση σε περιοχές με συγκέντρωση τάσεων ή πολύπλοκη γεωμετρία. Χρησιμοποιούνται πεπερασμένα στοιχεία ανώτερης τάξης και δημιουργείται πλέγμα σε όλα τα μέλη που απαρτίζουν μια κατασκευή με πυκνότητα πλέγματος ανάλογη της σημαντικότητας κάθε μέλους. Η βασική απαίτηση είναι η ακρίβεια και γι' αυτό γίνονται και κατάλληλες διορθώσεις στο στάδιο της μετεπεξεργασίας (Taig, 1996).

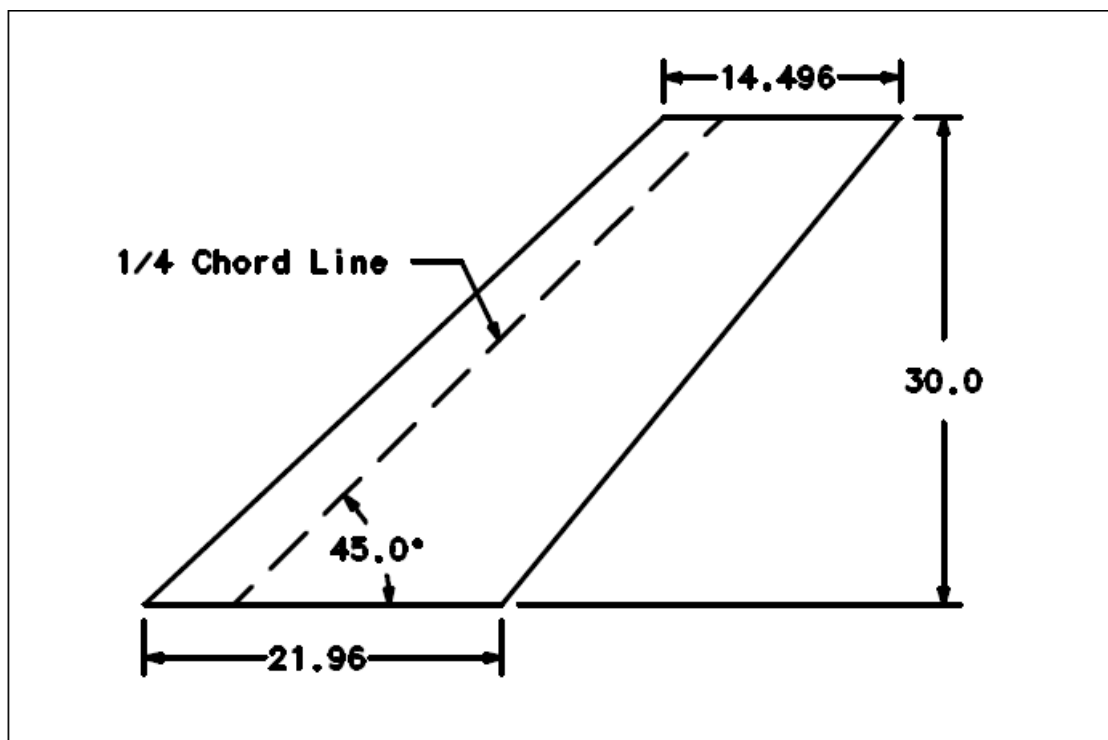
Στην περίπτωση της υπό-μοντελοποίησης, το πλέγμα είναι πιο αραιό και χρησιμοποιούνται πεπερασμένα στοιχεία κατώτερης τάξης. Τα μέλη της κατασκευής αναπαριστώνται με πολύ απλό τρόπο και γίνεται εκλέπτυνση μόνο σε ειδικές περιπτώσεις όπου υπάρχει μεγάλη αύξηση τάσεων. Η βασική απαίτηση είναι η ακρίβεια των υπολογισμών με μικρό όμως υπολογιστικό κόστος.

Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται ανάλογα με την περίπτωση μπορεί να είναι αραιό, πυκνό ή πολύ πυκνό. Το αραιό πλέγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια προκαταρκτική μελέτη της κατασκευής, σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, σε μια στατική αεροελαστική μελέτη ή μια γενική περίπτωση δυναμικής ανάλυσης. Το πυκνό πλέγμα

χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις μελέτης πτύχωσης (buckling), μελέτης αστοχίας της κατασκευής, σε θερμική ανάλυση, σε ανάλυση δυναμικής αεροελαστικότητας. Τέλος το πολύ πυκνό πλέγμα χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις μελέτης της θραύσεως της κατασκευής, σε περιπτώσεις χρήσης σύνθετων υλικών και σε περιπτώσεις που επιθυμείται ακριβής υπολογισμός των τάσεων (Taig, 1996).

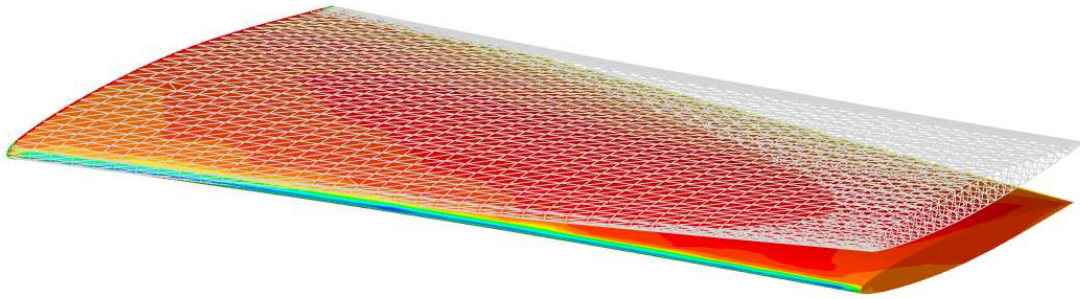
Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορα μοντέλα πτέρυγας αεροσκάφους. Στα απλούστερα μοντέλα η πτέρυγα μπορεί να μοντελοποιείται με πολύ απλά στοιχεία όπως στοιχεία δοκού, ενώ αν ο ερευνητής θέλει να αποδώσει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια το εσωτερικό της πτέρυγας (νευρώσεις, διαμήκη δοκό) μπορεί να χρησιμοποιήσει στοιχεία χωριαίου πλαισίου ή ράβδους. Καλύτερη αναπαράσταση της πτέρυγας μπορεί να γίνει με χρήση στοιχείων πλάκας ή κελύφους όπως και με τριδιάστατα στοιχεία ή συνδυασμό διαφόρων ειδών πεπερασμένων στοιχείων, κάτι που αυξάνει όμως πολύ το υπολογιστικό κόστος. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία πλάκας και στοιχεία δοκού ενώ η γεωμετρική αναπαράσταση της πτέρυγας θα γίνει με μια ορθογώνια πτέρυγα και με μια πτέρυγα AGARD. Η ορθογώνια πτέρυγα παρουσιάζεται σε επόμενη υποενότητα.

Διάφορα μοντέλα πτέρυγας έχουν δημιουργηθεί από την ερευνητική υπηρεσία AGARD (Advisory Group for Aerospace Research & Development). Η πτέρυγα AGARD 445.6 χρησιμοποιείται ευρέως σε περιπτώσεις μελέτης μεθόδου δομικής ανάλυσης πτερύγων αεροσκαφών καθώς και σε αεροελαστικές αναλύσεις. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας αυτής παρουσιάζονται στο **Σχήμα 3.7**:



Σχήμα 3.7: Γεωμετρικά στοιχεία της πτέρυγας AGARD 445.6 (οι διαστάσεις είναι σε ίντσες) (Akgun, Kanukcuoglu, & Oktay, 2005).

Η πτέρυγα AGARD έχει γωνία κλίσης 45 μοιρών και taper ratio 0.66 ενώ το προφίλ της αεροτομής της πτέρυγας AGARD είναι NACA 65A004.

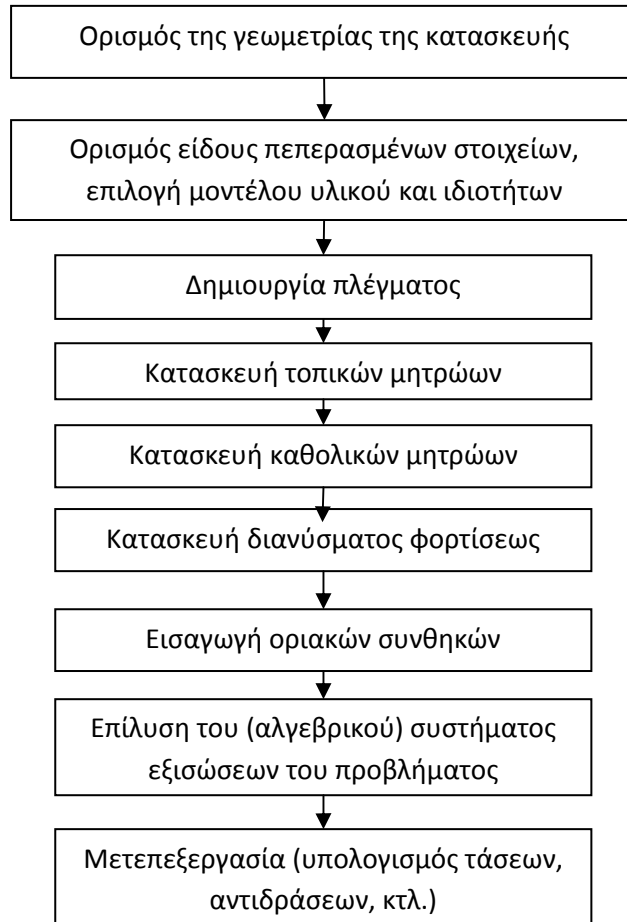


Σχήμα 3.8: 3D αναπαράσταση της πτέρυγας AGARD 445.6 (COOLFLUID).

Η πτέρυγα AGARD πρωτοχρησιμοποιήθηκε στην αεροσήραγγα Langley στην Βιρτζίνια των ΗΠΑ τη δεκαετία του 1960 για την μελέτες δυναμικής αεροελαστικότητας. Αποτελεί σημείο αναφοράς στη βιβλιογραφία, διότι τα αποτελέσματα από τα πειράματα που έγιναν με την πτέρυγα αυτή είναι από τα λίγα που υπάρχουν διαθέσιμα στην βιβλιογραφία σε περιπτώσεις δυναμικής αεροελαστικότητας.

3.2 Περιγραφή κωδίκων πεπερασμένων στοιχείων

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει ο σχολιασμός των κωδίκων πεπερασμένων στοιχείων που κατασκευάστηκαν. Αρχικά, θα περιγραφεί η γενική δομή ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων και τα τρία βασικά στάδια που περιλαμβάνει συνήθως (προ-επεξεργασία, επίλυση, μετεπεξεργασία).



Σχήμα 3.9: Γενικό διάγραμμα ροής για κώδικες πεπερασμένων στοιχείων.

Στο **Σχήμα 3.9** φαίνονται τα στάδια που περιλαμβάνει ένας τυπικός κώδικας πεπερασμένων στοιχείων. Οι περισσότεροι εμπορικοί κώδικες επίσης ακολουθούν αυτό το τυπικό διάγραμμα ροής, με ορισμένες διαφοροποιήσεις, ανάλογα με την πολυπλοκότητα και τη φύση του προβλήματος που αντιμετωπίζουν κάθε φορά.

Σε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων όπως και σε κώδικες που αναλύουν προβλήματα με άλλες αριθμητικές μεθόδους (πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένοι όγκοι, συνοριακά στοιχεία) διακρίνονται τα 3 γενικά στάδια που προαναφέρθηκαν: η προεπεξεργασία (preprocessing), η ανάλυση (processing) και η μετεπεξεργασία (postprocessing).

Στο στάδιο της προεπεξεργασίας γίνεται η προετοιμασία της ανάλυσης. Η προεπεξεργασία περιλαμβάνει τον ορισμό της γεωμετρίας, την κατασκευή του πλέγματος και τον ορισμό δεδομένων όπως κομβικές συντεταγμένες, συνδεσιμότητα πεπερασμένων στοιχείων, συνοριακές συνθήκες, συνθήκες φόρτισης και ιδιότητες υλικού.

Το στάδιο της ανάλυσης (processing) περιλαμβάνει την κατασκευή του τοπικού μητρώου δυσκαμψίας και του διανύσματος φόρτισης, την επιβολή των οριακών συνθηκών και την επίλυση των εξισώσεων.

Το στάδιο της μετεπεξεργασίας σχετίζεται κυρίως με την επεξεργασία και την αναπαράσταση των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, μπορούν να ληφθούν αποτελέσματα

για τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, για την παραμόρφωση της κατασκευής, για τις τάσεις που αναπτύσσονται σ' αυτή, για την κατανομή της θερμοκρασίας εάν εξετάζεται πρόβλημα που περιλαμβάνει θερμική ανάλυση, τις ιδιομορφές και τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής εάν πρόκειται για δυναμική ανάλυση κτλ.

Τα τρία αυτά στάδια σύμφωνα με τη βιβλιογραφία συνήθως περιλαμβάνουν τα βήματα που προαναφέρθηκαν παρότι σε ορισμένες περιπτώσεις ορισμένοι συγγραφείς κατηγοριοποιούν κάποια βήματα σε διαφορετικά στάδια απ' ότι άλλοι.

Στη συνέχεια θα περιγραφούν συνοπτικά οι κώδικες που κατασκευάστηκαν στην περίπτωση του πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού και του πεπερασμένου στοιχείου τύπου πλάκας.

3.2.1 Πεπερασμένο στοιχείο τύπου δοκού

Στην κατασκευή του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία που έχουν προαναφερθεί στη θεωρία και θα ακολουθηθεί η γενική δομή ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, προσαρμοσμένου σ' αυτήν την περίπτωση.

Η δομή του κώδικα για την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού είναι παρόμοια μ' αυτή που παρουσιάζεται στο διάγραμμα ροής του **Σχήματος 3.9**. Στο στάδιο της μετεπεξεργασίας, όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια, έχουν συμπεριληφθεί υπορουτίνες που υπολογίζουν τις αντιδράσεις στις αρθρώσεις και υπορουτίνες που κατασκευάζουν τα διαγράμματα M,Q,N.

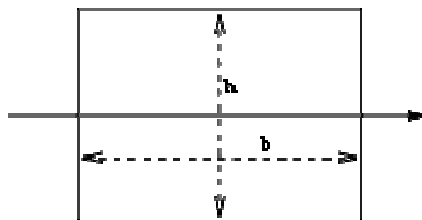
α) Στάδιο προεπεξεργασίας (preprocessing)

Αρχικά ορίζεται η γεωμετρία της κατασκευής. Στην περίπτωση της δοκού πρέπει να δοθεί το μήκος της L και τη ροπή αδρανείας της διατομής της I_{zz} .

Με χρήση κατάλληλων σχέσεων για τη ροπή αδρανείας μπορεί να προσομοιωθεί οποιαδήποτε διατομή δοκού (δοκοί I,T, L,Γ, δοκοί με τετραγωνική, ορθογωνική, ελλειπτική διατομή κτλ.). Στην προκειμένη περίπτωση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είτε ορθογωνική διατομή είτε ελλειπτική (η οποία θα προσομοιάζει καλύτερα στη γεωμετρία μιας αεροτομής- που προκύπτει από τομή της πτέρυγας) είτε η ακριβής διατομή χρησιμοποιώντας την κατάλληλη γεωμετρική της περιγραφή.

- Στην περίπτωση της **ορθογωνικής διατομής**, η ροπή αδρανείας δίνεται από τη σχέση:

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{όπου οι διαστάσεις } b \text{ και } h \text{ φαίνονται στο } \textbf{Σχήματος 3.10}. \text{ Συνήθως η διάσταση } h \text{ μπορεί να ονομαστεί και } t \text{ αν πρόκειται για πάχος ενός σώματος.}$$



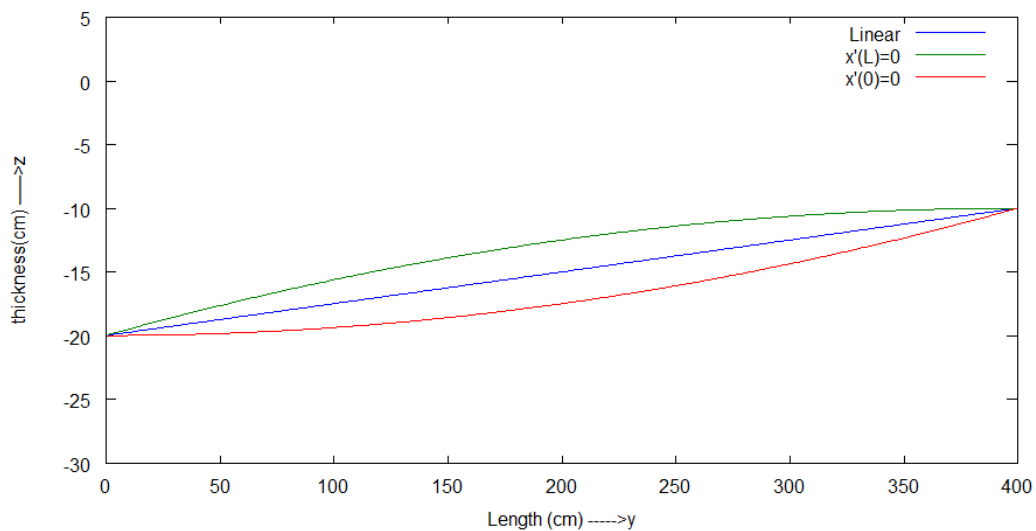
Σχήμα 3.10: Διαστάσεις ορθογωνικής διατομής (WIK).

Επομένως, πρέπει να οριστούν επίσης τα μεγέθη b και t για την κατασκευή (βλ. **Σχήμα 3.10**).

Όσον αφορά το πάχος t της δοκού, μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφο πάχος παντού (άρα σταθερό t) ή για να προσομοιωθεί ακόμα καλύτερα η πραγματική γεωμετρία, λαμβάνοντας υπόψη στοιχεία από τη θεωρία (όσον αφορά τις τυπικές διαστάσεις μιας πτέρυγας) να χρησιμοποιηθεί μια συνάρτηση που θα δίνει το πάχος σε κάθε σημείο της δοκού, δηλαδή $t=t(x)$. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί μια γραμμική καμπύλη, μια δευτεροβάθμια καμπύλη (βλ. **Σχήμα 3.11**) ή ακόμα και μια καμπύλη Spline ή Bezier. Στην περίπτωση της γραμμικής και της δευτεροβάθμιας συνάρτησης το πάχος μπορεί να δίνεται ως εξής:

$t(x) = ax+b$, με συνθήκες $t(0)=t_{\max}$ και $t(L) = t_{\min}$ για τον προσδιορισμό των a, b

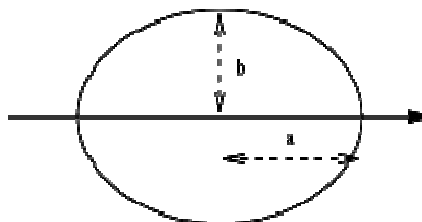
$t(x) = ax^2+bx+c$, με συνθήκες $t(0) = t_{\max}$, $t(L) = t_{\min}$, και άλλη μια συνθήκη π.χ. $t'(0)=0$ ή $t'(L) = 0$ (ανάλογα με το αν είναι επιθυμητό να είναι κυρτή ή κοίλη η καμπύλη)



Σχήμα 3.11: Οι καμπύλες παριστάνουν τη συνάρτηση που δίνει το πάχος σε κάθε περίπτωση (γραμμική, δευτεροβάθμια με $x'(0)=0$ ή $x'(L)=0$).

- Στην περίπτωση της ελλειπτικής διατομής, η ροπή αδρανείας δίνεται από τη σχέση:

$$I_{zz} = \frac{\pi ab^3}{4}$$
 όπου a και b οι διαστάσεις του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα της έλλειψης όπως φαίνονται στο **Σχήμα 3.12**:



Σχήμα 3.12: Διαστάσεις ελλειπτικής διατομής (WIK).

Η διάσταση b μπορεί να δοθεί από μια συνάρτηση όπως αυτές που αναφέρθηκαν προηγουμένως για το πάχος t μιας ορθογωνικής διατομής.

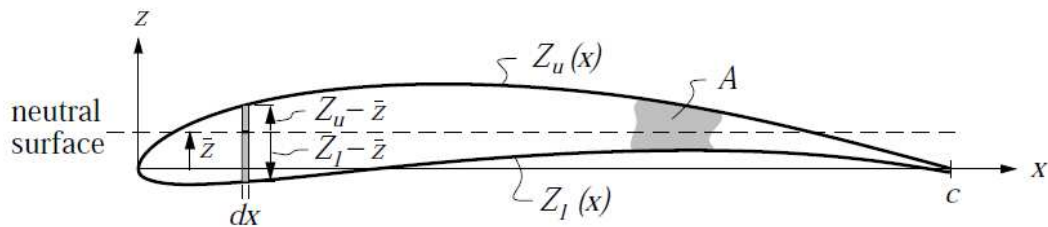
- Στην περίπτωση που ζητείται να προσομοιωθεί με μεγάλη ακρίβεια το σχήμα της αεροτομής, μπορεί να βρεθούν από τη βιβλιογραφία αναλυτικές σχέσεις που δίνουν τη γεωμετρία μιας αεροτομής (π.χ. NACA), και στη συνέχεια, από τις σχέσεις:

$$A = \int_0^c [Z_u - Z_l] dx,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{A} \int_0^c \frac{1}{2} [z_u^2 - z_l^2] dx,$$

$$I = \int_0^c \frac{1}{3} [(z_u - \bar{z})^3 - (z_l - \bar{z})^3] dx ,$$

(όπου, όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 3.13**: z_u είναι η συνάρτηση που δίνει τη γεωμετρία της πάνω πλευράς της αεροτομής (πλευρά υποπίεσης), z_l είναι η συνάρτηση που δίνει τη γεωμετρία της κάτω πλευράς της αεροτομής (πλευρά υπερπίεσης) και c είναι το μήκος της χορδής της αεροτομής)



Σχήμα 3.13: Χαρακτηριστικά μεγέθη για τον υπολογισμό ροπής αδράνειας αεροτομής (OCW).

να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας. Εάν υπάρχουν πιο αναλυτικά στοιχεία, μπορεί να γίνει η επιλογή του τύπου της αεροτομής σε κάθε άκρο της πτέρυγας και να θεωρηθεί και πάλι κάποια παρεμβολή που θα δίνει τη ροπή αδρανείας στις ενδιάμεσες θέσεις (κατά το εκπέτασμα).

Για παράδειγμα εάν θεωρηθεί μια **συμμετρική** αεροτομή NACA που προσδιορίζεται από κωδικό τεσσάρων ψηφίων η συνάρτηση που δίνει τη γεωμετρία των πλευρών της αεροτομής είναι η:

$$y_t = \frac{t}{0.2} c \left[0.2969 \sqrt{\frac{x}{c}} - 0.1260 \left(\frac{x}{c}\right) - 0.3516 \left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right]$$

όπου t το μέγιστο πάχος της αεροτομής, c το μήκος της χορδής.

Στην περίπτωση που η έκφραση που δίνει τη γεωμετρία είναι δύσκολο να ολοκληρωθεί ή η ολοκλήρωσή της συνεπάγεται σημαντικό υπολογιστικό κόστος χρησιμοποιούνται οι προσεγγιστικές εκφράσεις:

$$t = \max\{z_u(x) - z_l(x)\}$$

$$h = \max\{[z_u(x) + z_l(x)]/2\}$$

$$\tau = t/c$$

$$\varepsilon = h/c$$

$$A = K_A c^2 \tau$$

$$I = K_i c^4 \tau (\tau^2 + \varepsilon^2), \text{ όπου } K_A \approx 0.60, K_i \approx 0.036$$

Για μια πτέρυγα με πλάτος 1m και πάχος 10cm η τιμή της ροπής αδράνειας, με καθεμιά προσέγγιση (βλ. Πίνακα 3.1) είναι:

Διατομή	I (m ⁴)
ορθογωνική	8.33*10 ⁻⁵
ελλειπτική	4.91*10 ⁻⁵
NACA συμμετρική με προσεγγιστικούς τύπους	4.50*10 ⁻⁵

Πίνακας 3.1: Τιμές ροπών αδράνειας για τα διάφορα είδη διατομών.

Έπειτα (μετά τον ορισμό των κατάλληλων γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής), ορίζονται οι μηχανικές (ή και άλλες εκτός των μηχανικών, εάν συμπεριληφθούν στην ανάλυσή και άλλα πεδία) ιδιότητες του υλικού της πτέρυγας. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα μοντέλα υλικών όπως το γραμμικό ελαστικό ιστροπικό μοντέλο ελαστικότητας, το ορθοτροπικό, το ανισοτροπικό, μοντέλα σύνθετων υλικών, κτλ. Στην παρούσα εργασία, θα επιλεγεί αρχικά ένα ιστροπικό μοντέλο, στο οποίο απαιτείται να εισαχθεί η τιμή του μέτρου ελαστικότητας του υλικού (E).

Στη συνέχεια θα κατασκευαστεί το πλέγμα, το οποίο στην περίπτωση της δοκού θα είναι ομοιόμορφο και μονοδιάστατο (κατά τον διαμήκη άξονα της δοκού). Ορίζεται ο αριθμός των κόμβων ή ο επιθυμητός αριθμός διαμερίσεων της δοκού. Αν οριστεί ο αριθμός διαμερίσεων ως nx ο αριθμός των συνολικών πεπερασμένων στοιχείων προκύπτει ως nel=nx+1.

β) Στάδιο επίλυσης (processing)

Κατασκευάζεται το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας k (για το κάθε πεπερασμένο στοιχείο). Η αναλυτική μορφή του μητρώου k έχει δοθεί στην υποενότητα 2.2.1 (θεωρία για τις δοκούς).

Με βάση τα τοπικά μητρώα δυσκαμψίας k, δημιουργείται το ολικό μητρώο K, τοποθετώντας τα τοπικά μητρώα σε κατάλληλες θέσεις με βάση τις καθολικές συντεταγμένες των κόμβων που περιλαμβάνονται σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο.

Το επόμενο βήμα είναι ο ορισμός του διανύσματος φορτίσεων F. Στη θεωρία παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να εισαχθεί μια κατανομημένη ή συγκεντρωμένη φόρτιση σε κατάλληλη μορφή στο διάνυσμα F. Πρέπει να δοθεί προσοχή και στη φορά της φόρτισης, που είναι θετική αν βρίσκεται προς τα θετικά του γ.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις, θα μπορούσε να συμπεριληφθεί η συνεισφορά του ίδιου βάρους, αρχικών θερμικών φορτίσεων κτλ.

Ακολουθεί ο ορισμός των οριακών συνθηκών. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να οριστούν οι οριακές συνθήκες, δηλαδή οι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας της κατασκευής. Στην περίπτωση της δοκού που εξετάζεται θα θεωρηθεί πάκτωση στα αριστερά (πρόβολος) δηλαδή στο σημείο που η πτέρυγα βρίσκεται ενωμένη με το υπόλοιπο αεροσκάφος.

Ορίζεται ο κόμβος στον οποίο θα επιβληθεί η οριακή συνθήκη και αφού απαιτείται πάκτωση περιορίζονται και οι δύο βαθμοί ελευθερίας του κόμβου αυτού. Για να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες, σβήνονται οι γραμμές και στήλες του ολικού μητρώου δυσκαμψίας K που αντιστοιχούν στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας όπως και οι αντίστοιχες γραμμές του διάνυσματος φορτίσεων F .

Μπορεί τώρα να λυθεί το σύστημα $[K] \{u\} = [F]$ ως προς το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων u με κάποια κατάλληλη και αποδοτική μέθοδο ανάλογα με τη μορφή του μητρώου K που προκύπτει.

Στο διάνυσμα που θα ληφθεί πρέπει να επαυξηθεί τοποθετώντας σε κατάλληλες θέσεις και τις τιμές των μετατοπίσεων που αντιστοιχούν σε δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας (μηδενικά) ώστε να ληφθεί το ολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων.

γ) Στάδιο μετεπεξεργασίας (postprocessing)

Στο στάδιο της μετεπεξεργασίας με χρήση κατάλληλων κωδίκων στη περίπτωση της δοκού μπορούν να υπολογιστούν τα εξής: αντιδράσεις στις στηρίξεις, δυνάμεις στο εσωτερικό της κατασκευής, τα διαγράμματα M , Q , N του φορέα, κτλ.

3.2.2 Πεπερασμένο στοιχείο τύπου πλάκας

3.2.2.1 Ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία

Στην κατασκευή του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων τύπου πλάκας θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία της θεωρίας των πλακών (και των αντίστοιχων πεπερασμένων στοιχείων). Παρόμοια με τον κώδικα για το στοιχείο δοκού, θα ακολουθηθεί η γενική δομή ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, με ορισμένα πρόσθετα στοιχεία διότι χρησιμοποιείται στοιχείο διδιάστατης ελαστικότητας.

Η δομή του κώδικα για την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία τύπου πλάκας (ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία) είναι παρόμοια με αυτή που παρουσιάζεται στο γενικό διάγραμμα ροής.

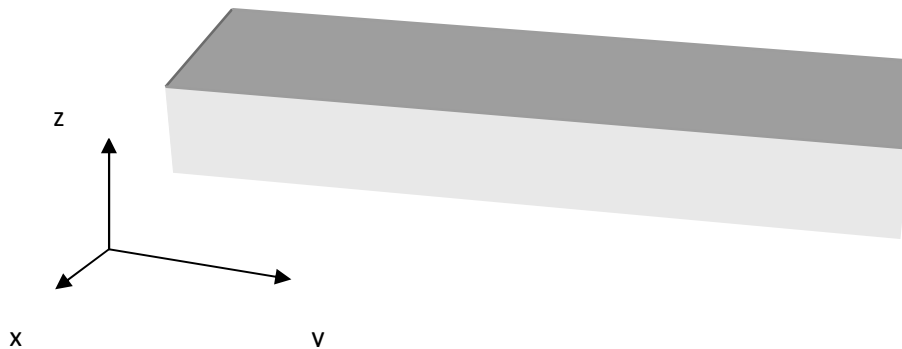
α) Στάδιο προεπεξεργασίας (preprocessing)

Αρχικά και πάλι θα πρέπει να οριστεί η γεωμετρία της κατασκευής. Εδώ, αν πρόκειται για ορθογωνική πλάκα ορίζεται το μήκος, το πλάτος και το πάχος της πλάκας. Αν πρόκειται για πιο πολύπλοκο σχήμα θα οριστούν ανάλογα τα κατάλληλα επιπρόσθετα δεδομένα.

Σύμφωνα με τη θεωρία και στην περίπτωση των πλακών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια κατάλληλη συνάρτηση η οποία να δίνει το πάχος σε κάθε σημείο $t(x,y)$. Στην παρούσα εργασία γενικά θα θεωρηθεί ομοιόμορφο πάχος στην πλάκα αλλά θα γίνουν κάποιες δοκιμές στο παρόν κεφάλαιο για να διερευνηθεί η συμπεριφορά του κώδικα όταν αντιμετωπίζει παρόμοια προβλήματα.

$t(x,y)=ay+b$ (στην περίπτωση που είναι επιθυμητή μια γραμμική συνάρτηση)

$t(x,y)=ay^2+by+c$ (στην περίπτωση που είναι επιθυμητή μια δευτεροβάθμια συνάρτηση)



Σχήμα 3.14: Η πλάκα-πτέρυγα στον τριδιάστατο χώρο.

ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάποια κατάλληλη συνάρτηση που να θεωρεί ότι το πάχος μεταβάλλεται και κατά τη διάσταση x (βλ. Σχήμα 3.14) .

Έπειτα, θα οριστούν οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού της πτέρυγας. Και εδώ, ανάλογα με το μοντέλο υλικού απαιτείται να οριστούν διάφορες σταθερές. Στο ισοτροπικό μοντέλο απαιτείται ορισμός του μέτρου ελαστικότητας (E) και του λόγου Poisson (ν). Το μέτρο διάτμησης (G) προκύπτει ως εξής:

$$G = 0.5 \frac{E}{1-2\nu}$$

Στο ορθοτροπικό μοντέλο που είναι πιο κατάλληλο στην περίπτωση τέτοιας πλάκας πρέπει να οριστούν το μέτρο ελαστικότητας στην διεύθυνση x και στην διεύθυνση y (E_x , E_y) όπως και ο λόγος Poisson(ν) στις αντίστοιχες διευθύνσεις. Το μέτρο διάτμησης (G) προκύπτει όπως προηγουμένως.

Στη συνέχεια, θα κατασκευαστεί το πλέγμα. Στην απλή περίπτωση μιας ορθογωνικής πλάκας με συγκεντρωμένο ή κατανεμημένο φορτίο επιλέγεται να κατασκευαστεί ένα απλό ομοιόμορφο διδιάστατο πλέγμα (δομημένο). Εάν είναι επιθυμητό να χρησιμοποιηθεί πλάκα με άλλη γεωμετρική μορφή χρησιμοποιείται ένας κώδικας του εργαστηρίου (g.o.d.pogrid) για δομημένα πλέγματα (Λαπλασιανά) στον οποίο εισάγονται δεδομένα για τη γεωμετρία της πτέρυγας και τις επιθυμητές διαμερίσεις σε κάθε πλευρά με κατάλληλους κώδικες και, στη συνέχεια, λαμβάνονται οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τον Τσαμασφύρο (Θεοτόκογλου & Τσαμασφύρος, 2005) οι συνήθεις μέθοδοι που υπάρχουν για την δημιουργία πλεγμάτων σε 2Δ, 3Δ προβλήματα ή προβλήματα κελυφών μπορούν να ταξινομηθούν σε επτά κατηγορίες:

1) Γένεση πλέγματος «με το χέρι» (ή «ημι-αυτόματος» τρόπος γένεσης του πλέγματος).

- 2) Γένεση πλέγματος με «μεταφερόμενη απεικόνιση» (transport-mapping), που γίνεται με χρήση πλέγματος αναφοράς.
- 3) Γένεση πλέγματος με βάση τη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων κατασκευασμένων σ' ένα πλέγμα αναφοράς.
- 4) Γένεση τεχνικών επικάλυψης (overlapping) και ανάπτυξης απλών πλεγμάτων με τέτοιο τρόπο που η πραγματική περιοχή να καλύπτεται με ακρίβεια.
- 5) Γένεση του τελικού πλέγματος με συγκροτημένο χωρισμό ενός αραιά σχεδιασμένου πλέγματος που αποτελείται από ομάδες στοιχείων στις οποίες έχει θεωρηθεί ένα απλό γεωμετρικό σχήμα.
- 6) Γένεση πλέγματος μιας περιοχής από το σύνορο με μια μέθοδο προωθούμενου μετώπου (advancing-front method).
- 7) Γένεση πλεγμάτων συνδυάζοντας προηγούμενα κατασκευασμένα πλέγματα.

Σε κάθε περίπτωση, χρειάζεται να γίνει ο ορισμός των διαμερίσεων για τις πλευρές τις πλάκας και τώρα προφανώς ο αριθμός των συνολικών κόμβων θα προκύψει από τη σχέση $n_{el} = (n_x+1)*(n_y+1)$.

Στη συνέχεια, θα οριστεί η συνδεσιμότητα των πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή οι αριθμοί των κόμβων που αποτελούν κάθε πεπερασμένο στοιχείο καθώς και θα αντιστοιχιστούν σ' αυτούς οι συντεταγμένες τους. Το βήμα αυτό είναι απαραίτητο πριν τη δημιουργία των μητρώων δυσκαμψίας.

β) Στάδιο ανάλυσης (processing)

Για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται ορθογωνικά στοιχεία τύπου πλάκας, το μητρώο δυσκαμψίας k στο τοπικό σύστημα θα προκύπτει με βάση τη θεωρία των λεπτών πλακών του Kirchhoff που έχει περιγραφεί στην υποενότητα 2.2.2.

Αφού υπολογιστεί το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας κάθε στοιχείου, μετά τοποθετείται σε κατάλληλη θέση σε καθολικό σύστημα, για να ληφθεί στο τέλος το ολικό μητρώο δυσκαμψίας K .

Στη συνέχεια, ορίζεται το διάνυσμα φορτίσεων F είτε για κατανεμημένο είτε για συγκεντρωμένο φορτίο.

Οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται με παρόμοιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της δοκού. Εδώ υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι, στην περίπτωση που υπάρχει πάκτωση, πρέπει να δεσμευτούν κατά μήκος των πλευρών που είναι πακτωμένες.

Με βάση τις οριακές συνθήκες, γίνονται οι κατάλληλες μετατροπές στο μητρώο k και το διάνυσμα F και επίλυοντας το σύστημα $[K]\{u\}=[F]$ λαμβάνεται το διάνυσμα των μετατοπίσεων k .

γ) Στάδιο μετεπεξεργασίας (post-processing)

Στο στάδιο της μετεπεξεργασίας, υπάρχει τη δυνατότητα να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις, τις δυνάμεις και τις ροπές στο εσωτερικό της κατασκευής καθώς και οι τάσεις στα πεπερασμένα στοιχεία που απαρτίζουν την κατασκευή. Υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού των κύριων τάσεων, των τάσεων von Mises καθώς και εξομάλυνση των τάσεων για να τηρείται η συνέχεια μεταξύ των στοιχείων.

Τέλος, με βάση τις τάσεις von Mises, μπορεί να υπάρχει σύγκριση με κάποιο κριτήριο αστοχίας και να προσδιοριστεί η αστοχία σε διάφορα σημεία της πλάκας, εάν συμβεί.

3.2.2.2 Ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία

Η επίλυση της πλάκας με ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία δε διαφέρει πολύ από την αντίστοιχη επίλυση με τα τετρακομβικά ορθογωνικά στοιχεία.

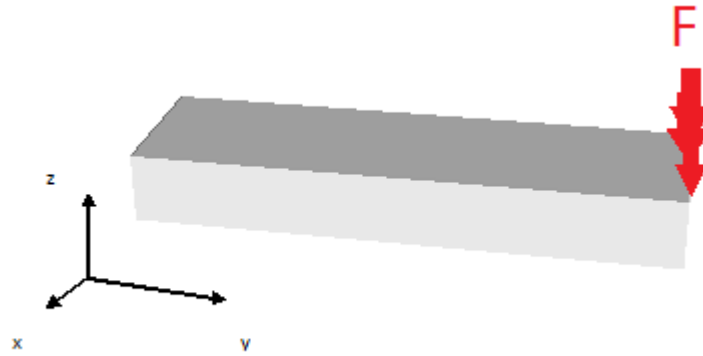
Η βασική διαφορά είναι ότι η επίλυση γίνεται με βάση τη θεωρία των Reissner-Mindlin για παχιές πλάκες η οποία λαμβάνει υπόψη και τη συνεισφορά της διατμητικής παραμόρφωσης της πλάκας.

Έτσι, στον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας εκτός του ότι λόγω της χρήσης των ισοπαραμετρικών στοιχείων πρέπει να γίνουν οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί με τη χρήση της Ιακωβιανής ορίζουσας που ορίστηκε στη θεωρία (μεταξύ συντεταγμένων ξ, η και x, y) υπολογίζεται το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας k ξεχωριστά για τους καμπτικούς όρους και ξεχωριστά για τους διατμητικούς όρους. Εδώ επιλέγεται η αριθμητική ολοκλήρωση για το μητρώο k και μάλιστα η «πεπερασμένη επιλεκτική ολοκλήρωση» (reduced selective integration), δηλαδή ολοκλήρωση με 2×2 σημεία Gauss για τους καμπτικούς όρους και με 1×1 σημεία για τους διατμητικούς όρους. Έπειτα προστίθενται τα δύο μητρώα δυσκαμψίας και ακολουθούνται τα ίδια βήματα που ακολουθούνται και στην επίλυση με τα τετρακομβικά ορθογωνικά στοιχεία.

3.3 Παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Στη παρούσα υποενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της επίλυσης προβλημάτων με τους τρεις κώδικες που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα.

Συγκεκριμένα, και στις τρεις περιπτώσεις θα επιλυθεί το πρόβλημα ενός πτερυγίου σε πρόβολο με συγκεντρωμένα φορτία 1000N (βλ. Σχήμα 3.15) στους κόμβους του ελεύθερου άκρου του (στην περίπτωση της δοκού υπάρχει μόνο 1 κόμβος στην άκρη). Το πτερύγιο γενικά, θεωρείται σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου μήκους $L=4m$, πλάτους $b=1m$ και πάχους 10cm, εκτός από ορισμένες περιπτώσεις (κατά την επίλυση με στοιχεία δοκού όταν θεωρηθεί μη ομοιόμορφο το πάχος, θεωρείται ότι κυμαίνεται από 10 έως 20cm κατά το μήκος της πτέρυγας). Το μέτρο ελαστικότητας είναι $E=210000 \text{ GPa}$ (όσο το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα) στην επίλυση σε επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιηθούν πραγματικά υλικά πτερυγίων αλλά, στο παρόν κεφάλαιο, το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως στο να ελεγχθεί κατά πόσο τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης προσεγγίζουν τις αναλυτικές λύσεις) και ο λόγος Poisson $\nu=0.1$. Το μέτρο διάτμησης G προκύπτει από τη σχέση που αναφέρθηκε στη προηγούμενη υποενότητα.



Σχήμα 3.15: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο πτερύγιο.

Στη συνέχεια, θα συγκριθούν τα αποτελέσματα της επίλυσης με πεπερασμένα στοιχεία με την αναλυτική λύση και θα σχολιαστεί η σύγκλιση προς την αναλυτική τιμή σε κάθε περίπτωση. Επίσης, θα γίνει παραμετρική μελέτη σε κάθε περίπτωση και θα σχολιαστούν συνοπτικά οι παράγοντες που επιδρούν στη σύγκλιση του αριθμητικού αποτελέσματος.

3.3.1 Στοιχεία δοκού

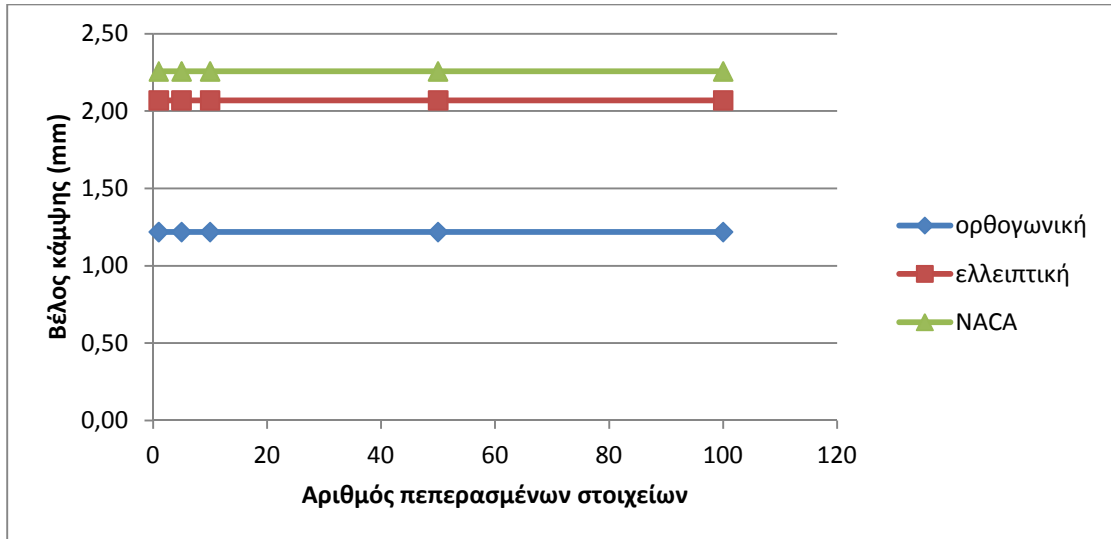
Όσον αφορά την επίλυση με τα στοιχεία δοκού, εξετάστηκαν οι περιπτώσεις που αναφέρονται στους Πίνακες 3.2 και 3.3:

α/α	nel	w (διατ.1)(mm)	σφάλμα (%)	w(διατ.2) (mm)	σφάλμα (%)	w(διατ.3) (mm)	σφάλμα(%)
1	1	1.219047619047	10 ⁻¹³ %	2.0695195139	10 ⁻¹⁴ %	2.25749559082	10 ⁻¹⁴ %
2	5	1.219047619049	10 ⁻¹¹ %	2.0695195141	10 ⁻⁹ %	2.25749559082	10 ⁻¹³ %
3	10	1.219047619050	10 ⁻¹¹ %	2.06951951398	10 ⁻¹² %	2.25749559082	10 ⁻¹² %
4	50	1.219047619122	10 ⁻¹¹ %	2.0695195141	10 ⁻⁹ %	2.25749559037	10 ⁻⁸ %
5	100	1.219047619502	10 ⁻¹⁰ %	2.0695195113	10 ⁻⁷ %	2.25749558788	10 ⁻⁶ %

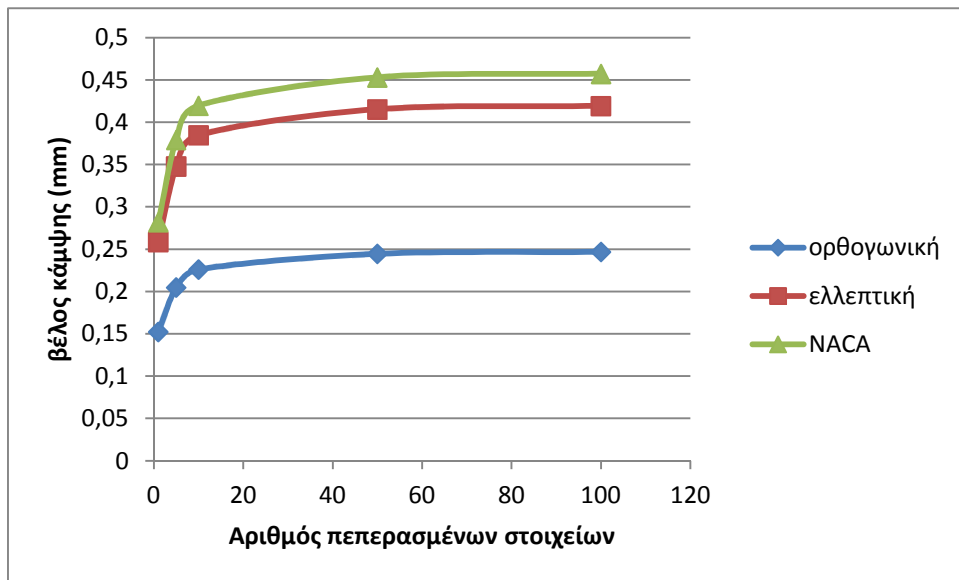
Πίνακας 3.2: Αποτελέσματα επίλυσης με στοιχεία δοκού με ομοιόμορφη κατανομή πάχους (διατ.1: ορθογωνική διατομή, διατ.2: ελλειπτική διατομή, διατ.3: διατομή αεροτομής NACA).

		Γραμμική συνάρτηση πάχους			Μη-γραμμική συνάρτηση πάχους		
α/α	nel	w (διατ.1)(mm)	w(διατ.2) (mm)	w(διατ.3) (mm)	w (διατ.1)(mm)	w(διατ.2) (mm)	w(διατ.3) (mm)
1	1	0.15238	0.25869	0.28219	0.15238	0.25868	0.28219
2	5	0.20488	0.34782	0.37941	0.16914	0.28715	0.31323
3	10	0.22622	0.38473	0.41967	0.17644	0.29954	0.32675
4	50	0.24465	0.41535	0.45308	0.18356	0.31162	0.33992
5	100	0.24694	0.41922	0.45730	0.18452	0.31326	0.34172

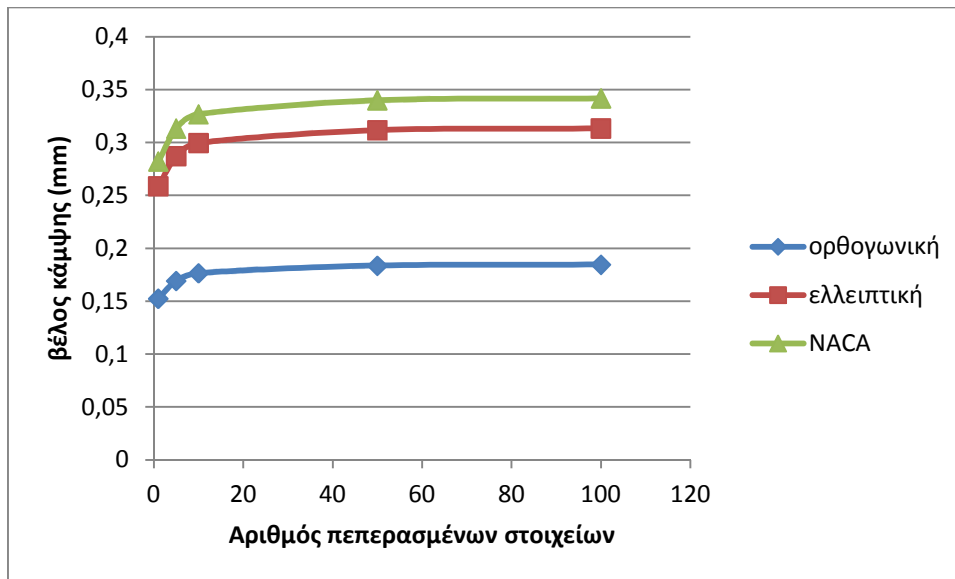
Πίνακας 3.3: Αποτελέσματα επίλυσης με στοιχεία δοκού με μη-ομοιόμορφη κατανομή πάχους (διατ.1: ορθογωνική διατομή, διατ.2: ελλειπτική διατομή, διατ.3: διατομή αεροτομής NACA).



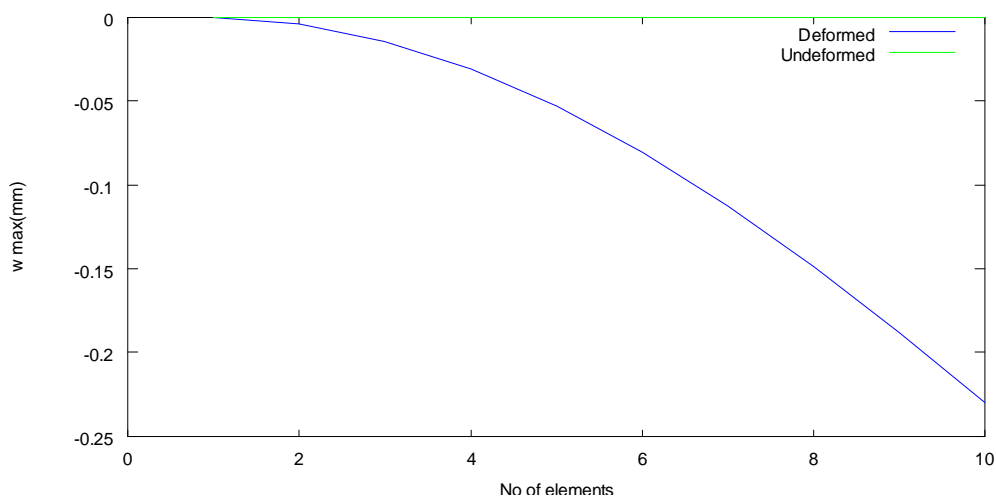
Σχήμα 3.16: Σύγκλιση του μέγιστου βέλους κάμψης στις περιπτώσεις ομοιόμορφου πάχους για ορθογωνική διατομή, ελλειπτική διατομή και διατομή αεροτομής NACA.



Σχήμα 3.17: Σύγκλιση του μέγιστου βέλους κάμψης στην περίπτωση γραμμικής μεταβολής του πάχους.



Σχήμα 3.18: Σύγκλιση του μέγιστου βέλους κάμψης στην περίπτωση δευτεροβάθμιας συνάρτησης μεταβολής του πάχους.



Σχήμα 3.19: Η παραμορφωμένη και η απαραμόρφωτη δοκός.

Από τις δοκιμές που έγιναν με τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Παρατηρείται ότι και στις τρεις περιπτώσεις διατομών με **ομοιόμορφο** πάχος (καθ' όλο το μήκος του πτερυγίου) υπάρχει σύγκλιση προς το ακριβές αποτέλεσμα με παρόμοιο τρόπο (βλ. Σχήμα 3.16). Η λύση ταυτίζεται με την αναλυτική λύση με μεγάλη ακρίβεια ήδη από την επίλυση με 1 πεπερασμένο στοιχείο και το σφάλμα είναι πρακτικά μηδενικό. Αυτό συμβαίνει, όπως προαναφέρθηκε στην υποενότητα 2.2.1, διότι σε περιπτώσεις συγκεντρωμένης φόρτισης το πολυώνυμο παρεμβολής που χρησιμοποιείται στα πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού είναι ίδιου βαθμού με το πολυώνυμο που προκύπτει ως λύση της αντίστοιχης μερικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το φαινόμενο.

(Η αναλυτική τιμή του μέγιστου βέλους κάμψης προκύπτει από τη σχέση:

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} \text{ και είναι ίση με } 0.0012190476 \text{ m,}$$

όπου $P=-1000\text{N}$ (το φορτίο στο ελεύθερο άκρο της δοκού), $L=4\text{m}$ (το μήκος της δοκού), $E=210000 \text{ GPa}$ το μέτρο ελαστικότητας της δοκού και I η ροπή αδράνειας I_{zz} .

- Στην περίπτωση που θεωρείται και μια **γραμμική συνάρτηση** κατανομής του πάχους της αεροτομής (βλ. **Σχήμα 3.17**) τα αποτελέσματα παρουσιάζουν κάποια διαφορά από την προσέγγιση ομοιόμορφου πάχους, όμως και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε σύγκλιση σε κάποια τελική τιμή.
- Στην περίπτωση που θεωρείται **δευτεροβάθμια (μη-γραμμική) συνάρτηση** κατανομής πάχους λαμβάνονται ελαφρά μικρότερες τιμές σε σχέση με τις τιμές που λήφθηκαν για την επίλυση με γραμμική κατανομή πάχους και στις τρεις περιπτώσεις (βλ. **Σχήμα 3.18**).

Και στις δύο τελευταίες περιπτώσεις παρατηρείται ότι η σύγκλιση στην αναλυτική λύση δεν είναι τόσο γρήγορη όσο στην περίπτωση του ομοιόμορφου πάχους και μάλιστα μετά από τα 50 πεπερασμένα στοιχεία φαίνεται ότι αρχίζει να συγκλίνει προς την τελική τιμή.

Όσον αφορά την επιλογή που πρέπει να γίνει για το ποια διατομή και ποια συνάρτηση πάχους θα χρησιμοποιηθεί στην επίλυση σε επόμενα κεφάλαια, θεωρείται ότι για να προσεγγισθεί καλύτερα η αεροτομή πρέπει να χρησιμοποιηθεί είτε η περίπτωση με ελλειπτική αεροτομή είτε η περίπτωση της αληθινής αεροτομής. Η χρήση κατανομής πάχους δεν επιβαρύνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο άρα ενδέχεται να συμπεριληφθεί στην επίλυση σε επόμενα κεφάλαια.

3.3.2 Ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία

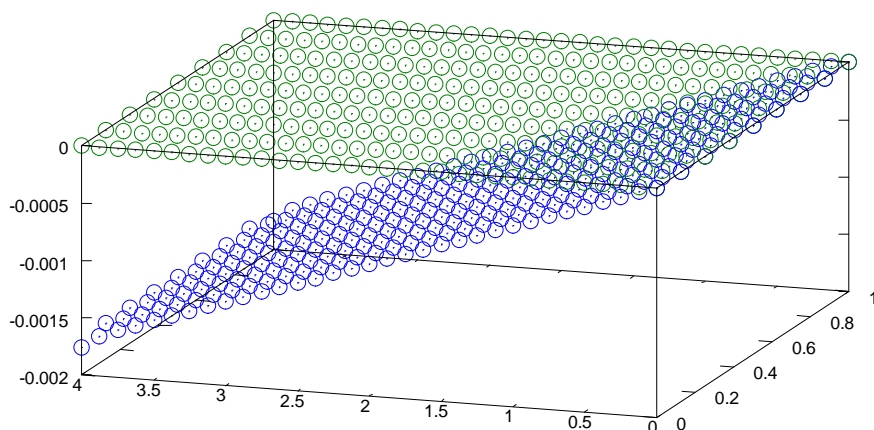
Όσον αφορά την επίλυση με τα ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία, εξετάστηκαν οι περιπτώσεις που αναφέρονται στον **Πίνακα 3.4**:

α/α	Διαμερίσεις (n_x, n_y) ¹	n_y/n_x	nel^2	$\max w$ (m)	σφάλμα (%)
1	5,15	3	75	0,00085046	30,23298
2	5,19	3,8	95	0,0010575	13,24856
3	6,18	3	108	0,0010116	17,01395
4	6,22	3,666667	132	0,0012205	0,123052
5	7,18	2,571429	126	0,0010142	16,80066
6	7,25	3,571429	175	0,001382	13,37162
7	8,25	3,125	200	0,0013837	13,51107
8	8,32	4	256	0,001753	43,8064

Πίνακας 3.4: Αποτελέσματα επίλυσης με ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία πλάκας.

¹ n_x, n_y : οι διαμερίσεις κατά την κατεύθυνση x και y αντίστοιχα

² nel : συνολικός αριθμός κόμβων του πλέγματος ($nel=(n_x+1)*(n_y+1)$)



Σχήμα 3.20: Η παραμορφωμένη και η απαραμόρφωτη πλάκα.

Όσον αφορά στο σχολιασμό των αποτελεσμάτων, μπορεί να γίνει επεξεργασία των αποτελεσμάτων με παρόμοιο τρόπο όπως θα γίνει στην υποενότητα 3.3.3. Στο τέλος της υποενότητας 3.3.3 θα εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίο επιλέγονται τελικά τα ισοπαραμετρικά τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία.

3.3.3 Ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία

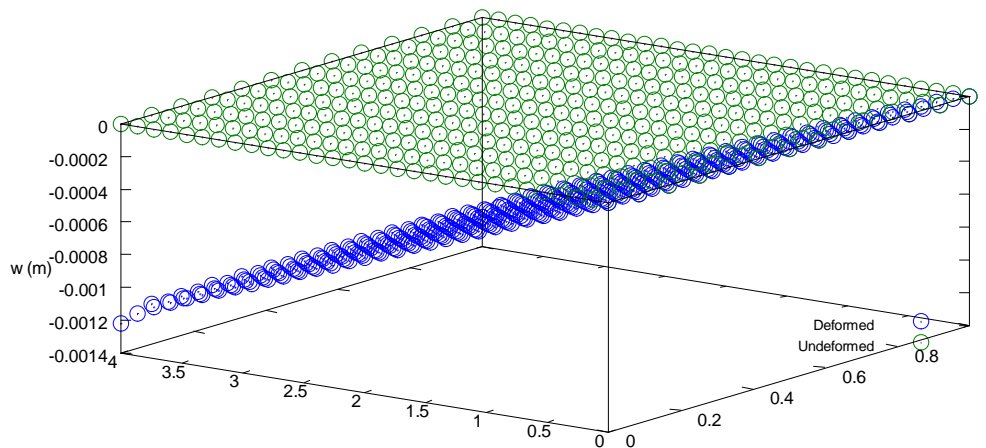
Όσον αφορά στην επίλυση με τα ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία, εξετάστηκαν οι περιπτώσεις που αναφέρονται στον Πίνακα 3.5:

α/α	Διαμερίσεις (nx,ny)	ny/nx	nel	max w	σφάλμα (%)
1	5,15	3,00	75	0,0008087	33,65874
2	5,18	3,60	90	0,0011491	5,734208
3	5,19	3,80	95	0,0012762	4,692371
4	5,20	4,00	100	0,0014101	15,67678
5	5,25	5,00	125	0,0021822	79,01559
6	6,15	2,50	90	0,00066737	45,25267
7	6,18	3,00	108	0,00094329	22,61772
8	6,20	3,33	120	0,0011549	5,258409
9	6,21	3,50	126	0,0012689	4,093519
10	6,22	3,67	132	0,0013886	13,91304
11	7,21	3,00	147	0,0010749	11,82116
12	7,22	3,14	154	0,0011755	3,568499
13	7,23	3,29	161	0,0012808	5,069729
14	7,24	3,43	168	0,0013907	14,08532
15	7,25	3,57	175	0,0015053	23,48646
16	8,20	2,50	160	0,00085225	30,08614
17	8,23	2,88	184	0,0011126	8,728466
18	8,24	3,00	192	0,0012073	0,959803
19	8,25	3,13	200	0,0013061	7,145201
20	8,32	4,00	256	0,0021093	73,03527
21	8,40	5,00	320	0,0032674	168,0394
22	10,25	2,50	250	0,0010365	14,97129

23	10,26	2,60	260	0,0011171	8,359311
24	10,27	2,70	270	0,0012008	1,493027
25	10,28	2,80	280	0,0012876	5,627564
26	10,30	3,00	300	0,0014706	20,63987
27	10,35	3,50	350	0,0019827	62,64971
28	10,40	4,00	400	0,0025731	111,0829
29	10,45	4,50	450	0,0032417	165,9311
30	15,30	2,00	450	0,00097648	19,895
31	15,32	2,13	480	0,0011036	9,466776
32	15,33	2,20	495	0,0011701	4,011485
33	15,34	2,27	510	0,0012387	1,616079
34	15,38	2,53	570	0,001533	25,75882
35	15,40	2,67	600	0,0016928	38,86792
36	15,45	3,00	675	0,0021257	74,38064
37	15,50	3,33	750	0,0026096	114,0771
38	15,60	4,00	900	0,0037292	205,9229
39	12,29	2,42	348	0,0011436	6,185398
40	12,30	2,50	360	0,0012201	0,090238
41	12,31	2,58	372	0,0012992	6,579163
42	12,40	3,33	480	0,0021263	74,42986
43	12,48	4,00	576	0,003036	149,0566

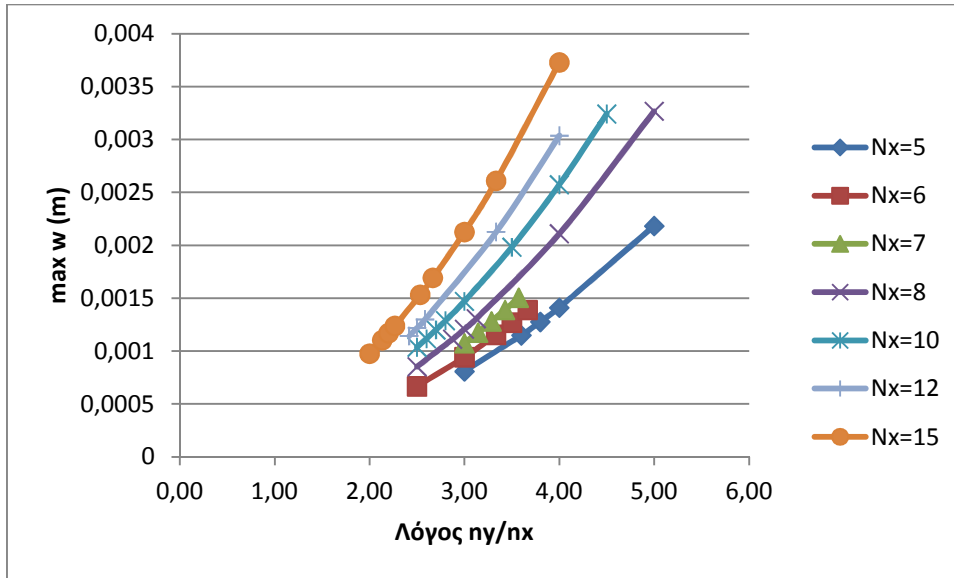
Πίνακας 3.5: Αποτελέσματα επίλυσης με ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία πλάκας.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης σχολιάζονται στη συνέχεια με τη βοήθεια κατάλληλων διαγραμμάτων.



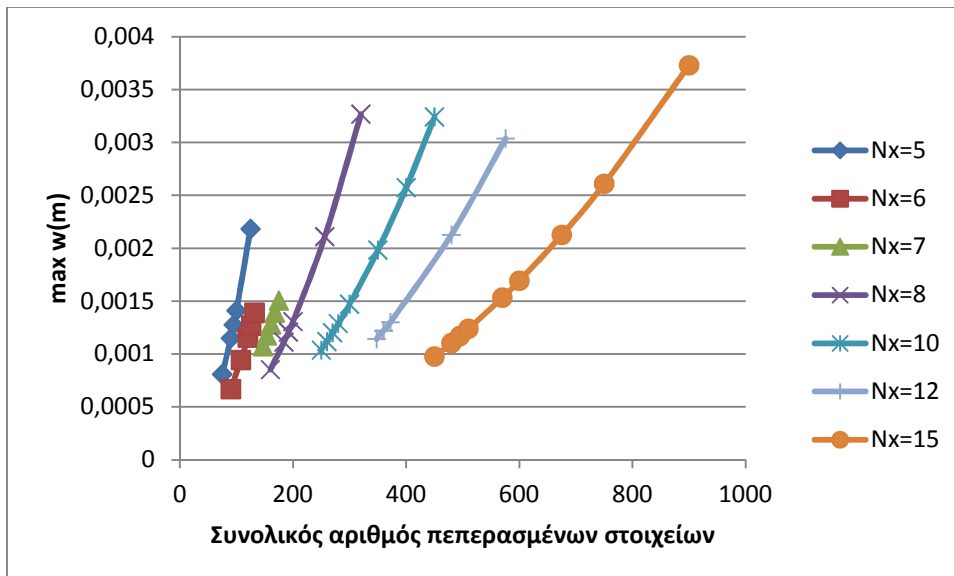
Σχήμα 3.21: Η παραμορφωμένη και η απαραμόρφωτη πλάκα.

Στο Σχήμα 3.22 παρουσιάζεται το μέγιστο βέλος κάμψης που υπολογίστηκε σε κάθε περίπτωση σε σχέση με το λόγο $\eta\gamma/\eta\kappa$ για διάφορα $\eta\kappa$. Παρατηρείται ότι η αύξηση του λόγου αυξάνει το υπολογιζόμενο βέλος κάμψης σε κάθε περίπτωση. Όσο το $\eta\kappa$ που χρησιμοποιείται αυξάνει, για ίδιο λόγο $\eta\gamma/\eta\kappa$ η υπολογιζόμενη τιμή είναι μεγαλύτερη. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σ' αυτό το διάγραμμα δεν προσφέρουν πολλές πληροφορίες από μόνα τους, αλλά έχουν ιδιαίτερη σημασία σε συνδυασμό με αυτά που θα αναφερθούν στη συνέχεια.



Σχήμα 3.22: Γραφική παράσταση του μέγιστου βέλους κάμψης σε σχέση με το λόγο ηγ/ηx.

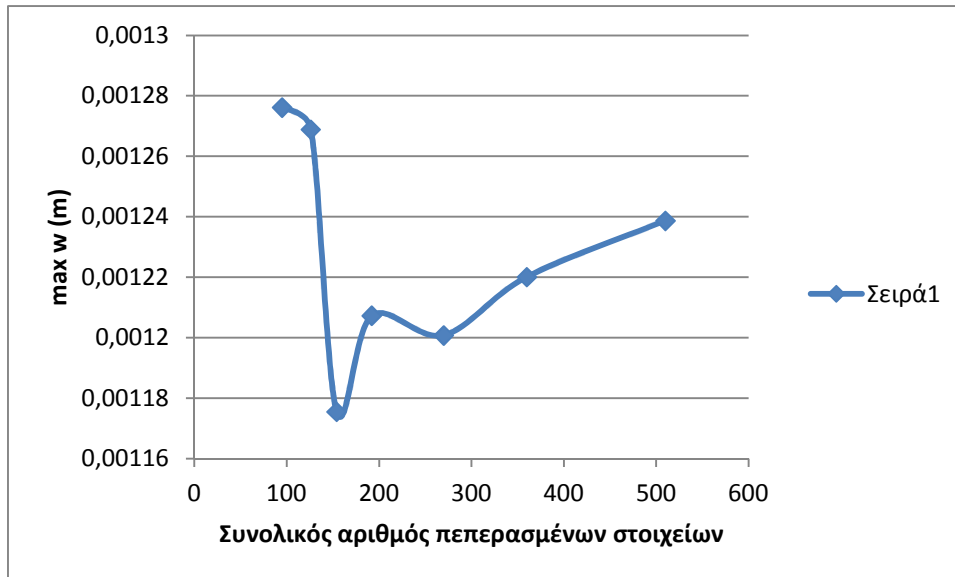
Στο Σχήμα 3.23 παρουσιάζεται το μέγιστο βέλος κάμψης σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία που έχουν χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση για διάφορες τιμές ηx. Εδώ παρατηρείται ότι όπως θα αναμενόταν με βάση το προηγούμενο διάγραμμα, αύξηση του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων για σταθερό ηx (δηλαδή αύξηση του ηγ) δίνει μεγαλύτερο αριθμητικό αποτέλεσμα για το βέλος κάμψης κάτι που σημαίνει ότι για δεδομένο ηx μεγάλη αύξηση του ηγ πέρα από ένα σημείο (στο οποίο και υπάρχει η πιο κοντινή τιμή στην πραγματική) δε δίνει καλύτερη λύση. Το ίδιο παρατηρήθηκε και προηγουμένως γιατί για αύξηση του λόγου ηγ/ηx πέρα από κάποια τιμή, το αριθμητικό αποτέλεσμα αυξάνεται πέραν των τιμών που βρίσκονται κοντά στην αναλυτική λύση.



Σχήμα 3.23: Γραφική παράσταση του μέγιστου βέλους κάμψης σε σχέση με τον συνολικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων του πλέγματος.

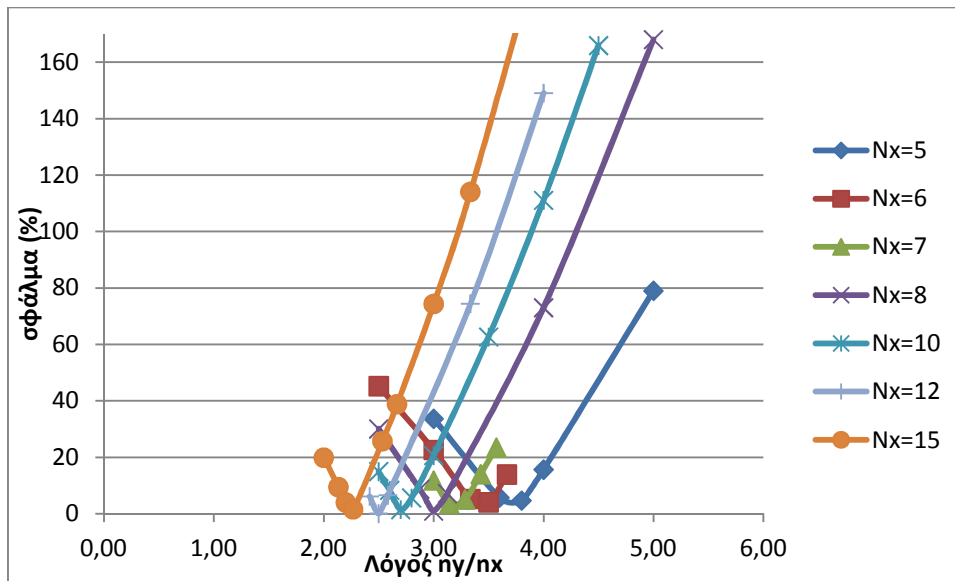
Το Σχήμα 3.24 κατασκευάστηκε ως εξής: για κάθε «ομάδα» δοκιμών (για ηx=5, ηx=8, κτλ.) κρατήθηκε η λύση που είχε το μικρότερο σφάλμα, δηλαδή ήταν πιο κοντά στην αναλυτική

λύση από τις υπόλοιπες με το ίδιο n_x . Έτσι προέκυψε το διάγραμμα σύγκλισης που δείχνει όπως αναμένεται, ότι αύξηση του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων δίνει γενικά καλύτερη λύση (με την προϋπόθεση ότι ο λόγος n_y/n_x είναι ο «κατάλληλος» όπως φάνηκε από τα προηγούμενα διαγράμματα). Όταν ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων αυξηθεί αρκετά παρατηρείται λίγο μεγαλύτερη απόκλιση στην τιμή αλλά και πάλι είναι σε αποδεκτά όρια (σφάλμα < 2%).



Σχήμα 3.24: Διάγραμμα σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης σε σχέση με τον συνολικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων στο πλέγμα.

Στο **Σχήμα 3.25** απεικονίζεται το σφάλμα μεταξύ αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σε σχέση με το λόγο n_y/n_x . Παρατηρείται ξεκάθαρα ότι σε κάθε καμπύλη υπάρχει ένα ολικό ελάχιστο για το σφάλμα, το οποίο ανάλογα με την καμπύλη, κυμαίνεται για λόγους n_x/n_y από 2,2 μέχρι 3,8 περίπου. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων του πλέγματος γενικά ο λόγος n_y/n_x που δίνει πλησιέστερη τιμή στην αναλυτική λύση πρέπει να είναι μικρότερος.



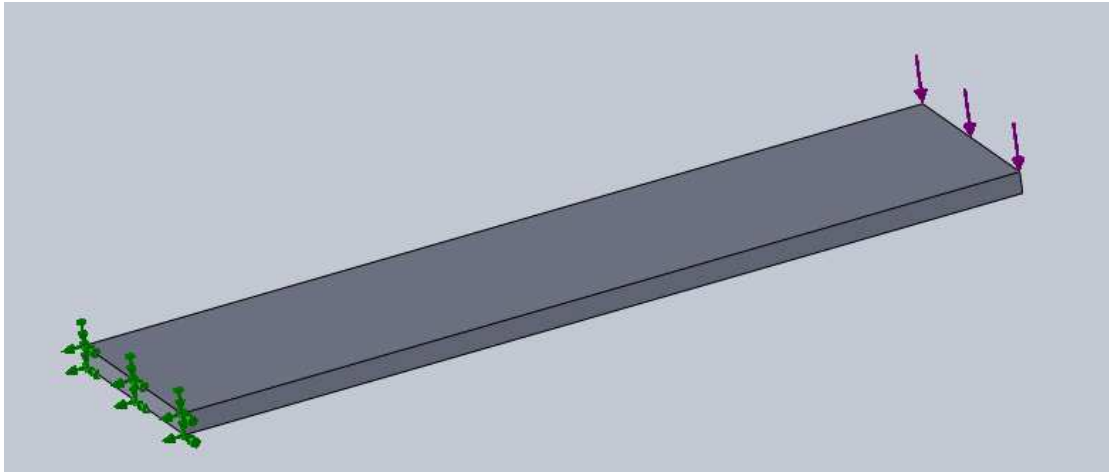
Σχήμα 3.25: Διάγραμμα σφάλματος μεταξύ αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για το μέγιστο βέλος κάμψης της πλάκας σε σχέση με το λόγο n_y/n_x .

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα, παρατηρείται ότι πολύ σημαντικό ρόλο στην επίτευξη καλής λύσης είναι ο λόγος n_y/n_x στο πλέγμα, και ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων. Τα αποτελέσματα αυτά θα οδηγήσουν στην σωστή επιλογή των διαμερίσεων και του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση της πτέρυγας σε επόμενα κεφάλαια. Επιπλέον, σε περίπτωση που η επίλυση είναι χρονοβόρα για τον αριθμό διαμερίσεων που επιλέχθηκαν αρχικά μπορεί να επιλεγεί κάποιο άλλο ζεύγος που να έχει αποδεκτές τιμές σφάλματος και αρκετά μικρότερο χρόνο επίλυσης.

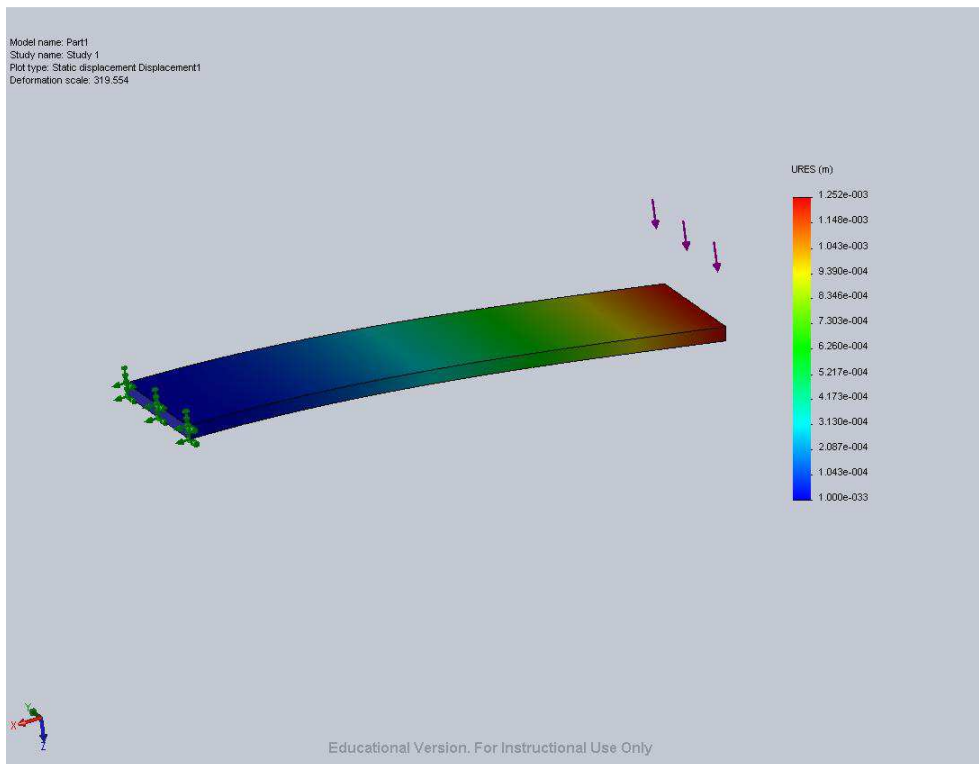
Σε σχέση με τα ορθογωνικά τετρακομβικά στοιχεία, τα ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία παρουσιάζουν λίγο καλύτερη σύγκλιση και μεγαλύτερη ευελιξία χρήσης διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πλάκα οποιασδήποτε μορφής με ικανοποιητικά αποτελέσματα (σύμφωνα με τη θεωρία). Άρα, κατά την επίλυση πλακών σε επόμενα κεφάλαια, θα επιλεγούν τα ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία.

3.3.4 Επίλυση με το λογισμικό Solidworks

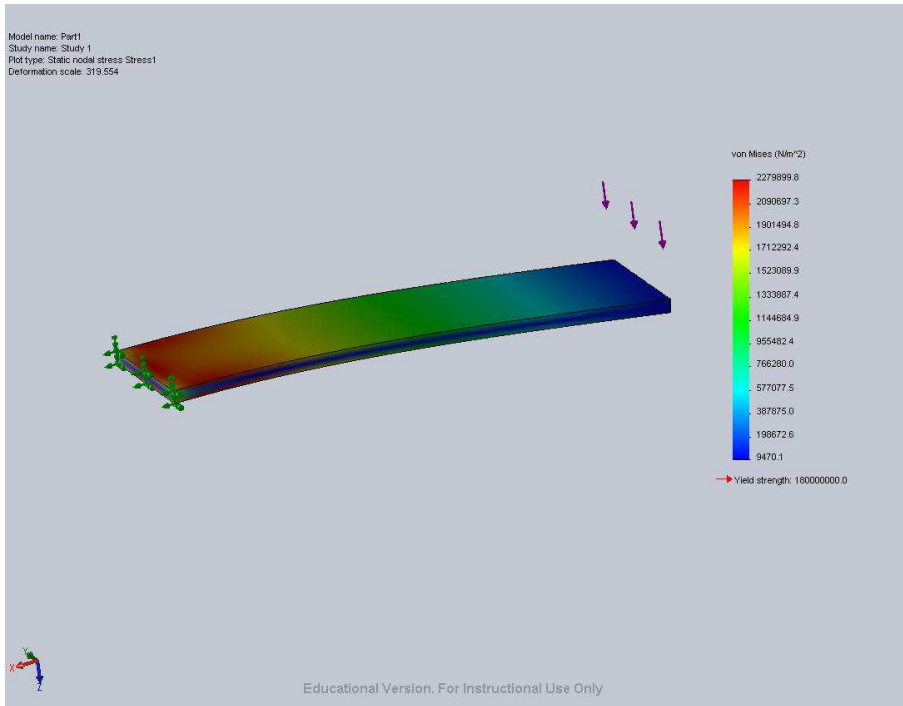
Για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων έγινε χρήση του εμπορικού λογισμικού Solidworks 2009 και ειδικότερα του Solidworks Simulation. Στη συνέχεια παρατίθενται σχήματα (3.26-3.28) από την επίλυση της περίπτωσης της πακτωμένης πλάκας με φορτίο 1000 N στο άκρο της. Η επίλυση έγινε με 3D πεπερασμένα στοιχεία.



Σχήμα 3.26: Οριακές συνθήκες στην πλάκα: Πάκτωση στο αριστερό άκρο και επιβολή φόρτισης 1000 N στο δεξιό άκρο.



Σχήμα 3.27: Διάγραμμα μετατοπίσεων της πλάκας.



Σχήμα 3.28: Διάγραμμα ισοδύναμων τάσεων Von Mises στην πλάκα.

Από το **Σχήμα 3.27** φαίνεται ότι η μέγιστη μετατόπιση είναι στο άκρο της πλάκας και ισούται με 0.001252 ενώ η υπολογισμένη από τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων πλάκας που χρησιμοποιήθηκε ήταν 0.001219. Οι μικρές διαφορές στο αποτέλεσμα οφείλονται στην ενδεχόμενη χρήση υλικού με ελαφρά διαφορετικές ιδιότητες (π.χ. διαφορετικό λόγο Poisson για το υλικό που υπάρχει στη βιβλιοθήκη του Solidworks) ή και στην διαφορετική ακρίβεια που επιτυγχάνεται με τα 3D πεπερασμένα στοιχεία. Πάντως φαίνεται ότι ο κώδικας που αναπτύχθηκε παράγει ακριβή αποτελέσματα σ' αυτήν την περίπτωση.

Από το **Σχήμα 3.28** φαίνεται ότι οι περιοχές που καταπονούνται περισσότερο σ' αυτήν την φόρτιση είναι οι περιοχές κοντά στην πάκτωση. Σε καμία περίπτωση, όμως, δεν ξεπερνούν το όριο διαρροής του υλικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Περιγραφή του επιλύτη Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Στην παρούσα εργασία δεν θα επιλυθεί το αεροδυναμικό πρόβλημα με αναλυτικές ή ημιεμπειρικές μεθόδους αλλά με κώδικα Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Γι' αυτό κρίθηκε σκόπιμο να γίνει μια σύντομη περιγραφή των βασικών λεπτομερειών του κώδικα "f3d" του εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών που θα χρησιμοποιηθεί.

4.1 Δομή κωδίκων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και χρησιμοποιούμενες μέθοδοι

Στους κώδικες υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, όπως και στον κώδικα που θα περιγραφεί στη συνέχεια διακρίνονται τρία βασικά στάδια (παρόμοια με τους κώδικες δομικής μηχανικής που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 2):

- Την **προεπεξεργασία**, κατά την οποία ορίζεται η γεωμετρία (τα φυσικά όρια) του προβλήματος, διαιρείται ο χώρος σε διακριτά κελιά (το πλέγμα που μπορεί να είναι δομημένο ή μη-δομημένο), ορίζεται η φυσική του προβλήματος (οι εξισώσεις που θα επιλυθούν) και οι οριακές συνθήκες.
- Την **ανάλυση**, όπου οι εξισώσεις επιλύονται συνήθως επαναληπτικά είτε για μόνιμο ή μη-μόνιμο πρόβλημα.
- Την **μετεπεξεργασία** όπου γίνεται η ανάλυση και οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων.

Ορισμένες από τις βασικότερες μεθόδους διακριτοποίησης είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, των πεπερασμένων όγκων, των πεπερασμένων στοιχείων, των συνοριακών στοιχείων, φασματικές μέθοδοι κτλ. (WIK).

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών έχει ιστορική σημασία και είναι σχετικά απλή στον προγραμματισμό. Σήμερα χρησιμοποιείται μόνο σε συγκεκριμένους κώδικες.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται σήμερα είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Οι εξισώσεις του προβλήματος επιλύονται σε διακριτούς όγκους ελέγχου. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις γράφονται σε συντηρητική μορφή και μετά διακριτοποιούνται, ώστε να ικανοποιείται η διατήρηση της ροής διαμέσου των όγκων ελέγχου.

4.2 Ο επιλύτης 3D εξισώσεων Euler f3d

4.2.1 Περιγραφή του κώδικα f3d

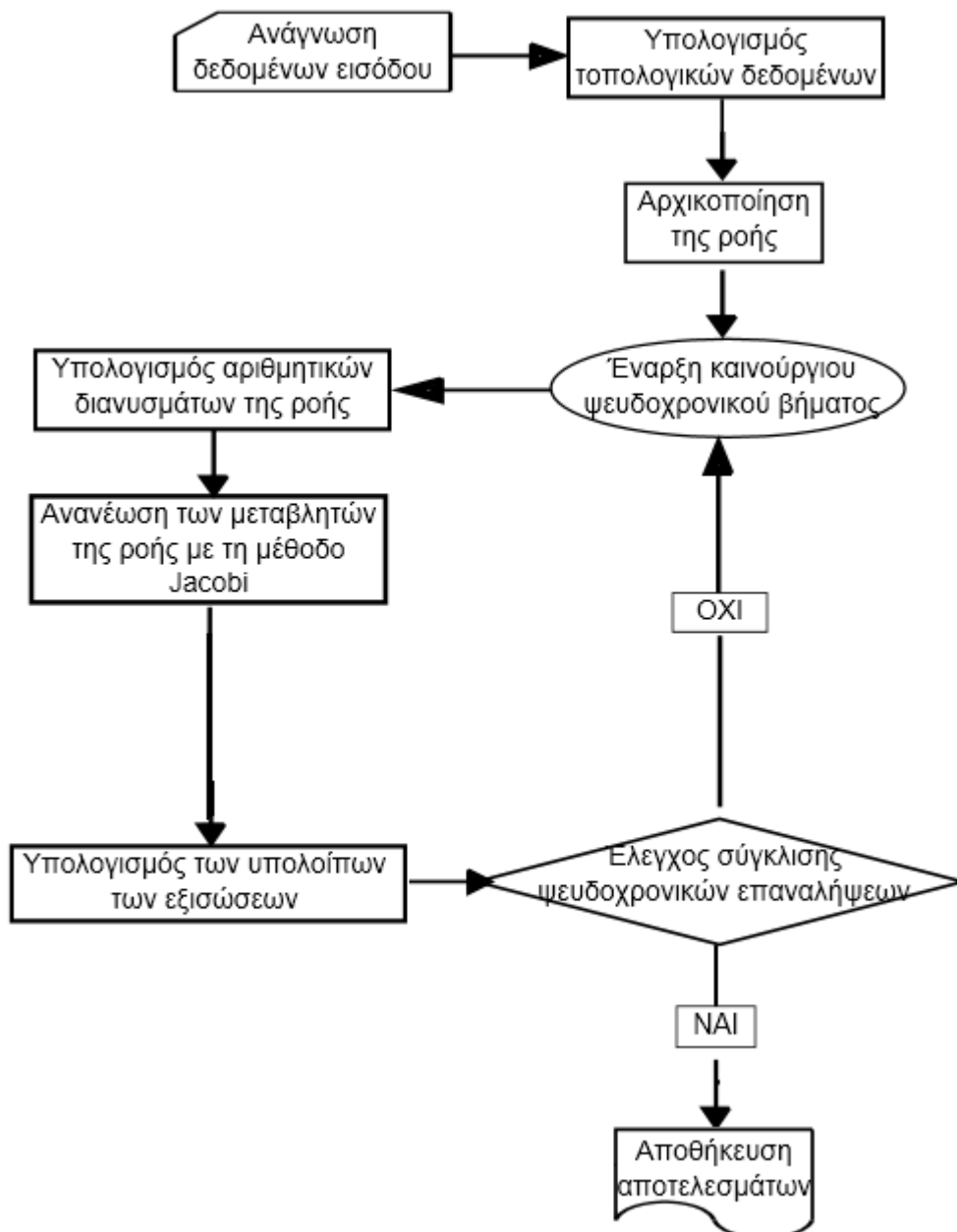
Ο κώδικας f3d είναι ένας κώδικας υπολογιστικής ρευστομηχανικής του εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής και Βελτιστοποίησης) που επιλύει τις 3D εξισώσεις Euler γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους

(μεταξύ των άλλων). Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας έγιναν κάποιες τροποποιήσεις στον κώδικα αυτό, οι οποίες θα αναφερθούν στο κεφάλαιο 5.

Ο κώδικας f3d δέχεται ως είσοδο ένα αρχείο με διάφορες παραμέτρους, που αφορούν τόσο δεδομένα όπως η γεωμετρία της πτέρυγας, οι οριακές συνθήκες, όσο και αριθμητικές παραμέτρους που σχετίζονται με τους επιλύτες (π.χ. μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, επιθυμητή τάξη μεγέθους σφάλματος). Το όνομα του αρχείου που περιλαμβάνει τη γεωμετρία του κώδικα δίνεται στην πρώτη γραμμή του αρχείου παραμέτρων. Η εισαγωγή των οριακών συνθηκών γίνεται σε άλλες γραμμές και είναι δυνατόν να εισαχθούν δεδομένα όπως η πρώτη και η δεύτερη γωνία εισόδου (θ_1 και θ_2) και η πρώτη και δεύτερη γωνία εξόδου (θ_3 και θ_4), ο αριθμός Mach της ροής. Η επίλυση είναι δυνατόν να γίνει είτε αδιάστατα είτε διαστατά, ορίζοντάς το με κατάλληλο τρόπο στο αρχείο παραμέτρων. Επίσης, τα αποτελέσματα μπορούν να γραφούν και σε binary μορφή.

Η γεωμετρία της πτέρυγας και πληροφορίες σχετικά με το μη-δομημένο πλέγμα που θα χρησιμοποιηθεί από τον επιλύτη περιλαμβάνονται σε δύο αρχεία με καταλήξεις .nod και .ele τα οποία έχουν όνομα το οποίο, όπως προαναφέρθηκε, δηλώνεται στην πρώτη γραμμή του αρχείου παραμέτρων. Τα αρχεία αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν από βοηθητικά προγράμματα για την οπτικοποίηση του χωρίου επίλυσης αλλά και κατά το στάδιο της μετεπεξεργασίας, την απεικόνιση των υπολογισθέντων πεδίων (ταχύτητας, πυκνότητας). Στο **Σχήμα 4.2** απεικονίζεται ενδεικτικά το πλέγμα γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους σε μία περίπτωση που θα παρουσιαστεί αργότερα στο κεφάλαιο 5.

Στη συνέχεια, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής που απεικονίζεται στο **Σχήμα 4.1** γίνεται ο υπολογισμός τοπολογικών δεδομένων από το πρόγραμμα.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής του κώδικα f3d.

Ακολουθεί η αρχικοποίηση της ροής και ξεκινάει το πρώτο ψευδοχρονικό βήμα. Για την επίλυση χρησιμοποιείται η επαναληπτική μέθοδος Jacobi. Όταν επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια (σύγκλιση του κώδικα) τότε οι ψευδοχρονικές επαναλήψεις σταματούν και παράγονται τα κατάλληλα αρχεία εξόδου.

4.2.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα από την επίλυση ροής γύρω από πτέρυγα

Στη συνέχεια παρατίθενται ενδεικτικά αποτελέσματα που παράγονται με χρήση του κώδικα f3d για τις συνθήκες που αναφέρονται στον Πίνακα 4.1.

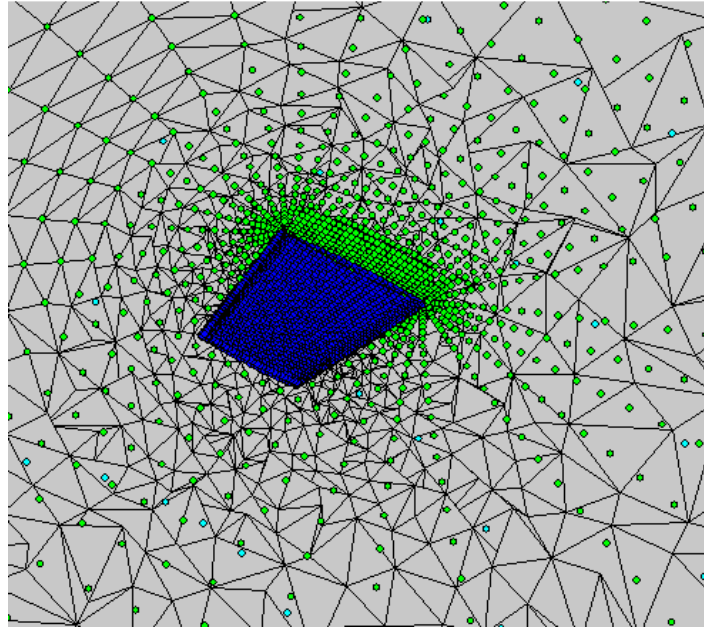
α	1.7°
----------	------

Κεφάλαιο 4-Περιγραφή του επιλύτη ΥΡΔ

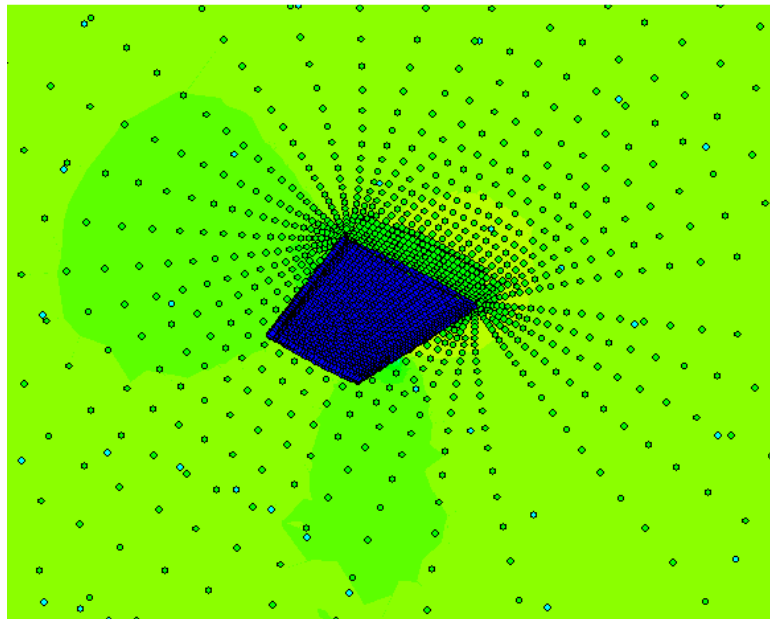
θ_1	0.0°
θ_2	0.0°
M_∞	0.85

Πίνακας 4.1: Συνθήκες για την επίλυση της περίπτωσης που παρουσιάζεται.

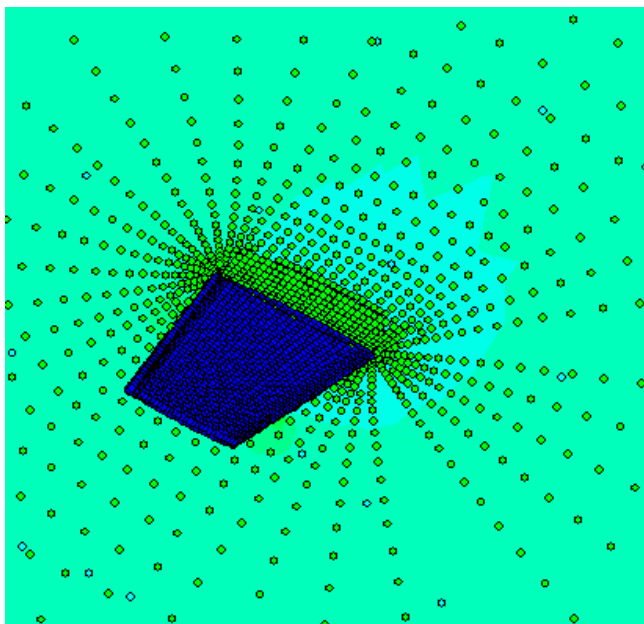
Τα αποτελέσματα οπτικοποιήθηκαν με το λογισμικό grid που υλοποιήθηκε κατά την διάρκεια της διδακτορικής διατριβής του Δρ. Α. Γιώτη στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών.



Σχήμα 4.2: Τριδιάστατο πλέγμα (τομή) που χρησιμοποιήθηκε σε μια περίπτωση επίλυσης με τον κώδικα f3d.



Σχήμα 4.3: Το πεδίο του αριθμού Mach γύρω από την πτέρυγα AGARD 445.6(min: 0.67, max: 0.96).



Σχήμα 4.4: Το πεδίο της πίεσης γύρω από την αεροτομή AGARD 445.6 (min: 0.838, max: 1.310).

4.2.3 Περιγραφή Εξισώσεων Euler

Θεωρήθηκε σκόπιμο, για λόγους πληρότητας να γίνει μια σύντομη περιγραφή των εξισώσεων Euler στις τρεις διαστάσεις, τις οποίες επιλύει ο κώδικας f3d γύρω από την πτέρυγα.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial x_r} &= 0 \text{ (εξ. συνέχειας)} \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho u_r u_i + p \delta_{ri}) &= 0 \text{ (} i = 1,2,3 \text{) (εξ. ορμής)} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r}[u_r(\rho E + p)] &= 0 \text{ (εξ. ενέργειας)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Αρχικά θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις Euler, σε συντηρητική γραφή για μόνιμη ροή συμπιεστού ρευστού, σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τριδιάστατες ροές.

όπου με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του ρευστού, με u_r ($r=1,2,3$) η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση x_r , με E η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, με e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και με p η πίεση του ρευστού. Ο χρονικός όρος $\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}$ στις εξισώσεις 1.1 αποτελεί «ψευδο-χρονικό» όρο και έχει προστεθεί για την εκμετάλλευση των ιδιοτήτων που έχουν τα υπερβολικά συστήματα και για είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μια μέθοδος χρονοπροέλασης για την επίλυση του συστήματος (Καββαδίας, 2011).

Η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας εκφράζεται από τη **σχέση 4.2**:

$$E = e + \frac{1}{2} u_r u_r \quad (4.2)$$

Με τον ορισμό του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών στη μορφή:

Κεφάλαιο 4-Περιγραφή του επιλύτη ΥΡΔ

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

και του διανύσματος της μη συνεκτικής ροής (flux) κατά την κατεύθυνση x_r :

$$\vec{F}_r = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_1 u_r + p \delta_{1r} \\ \rho u_2 u_r + p \delta_{2r} \\ \rho u_3 u_r + p \delta_{3r} \\ u_r (\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

οι εξισώσεις σχήμα 1.4 μπορούν να γραφούν στην παρακάτω διανυσματική γραφή:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

Στην επίλυση γίνεται η παραδοχή του τελείου αερίου, του οποίου η συμπεριφορά δίνεται από την ακόλουθη καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \quad (4.6)$$

όπου R_g είναι η σταθερά του τελείου αερίου και υπολογίζεται σύμφωνα με τις ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και όγκο, c_p και c_v αντίστοιχα από τη σχέση:

$$R_g = c_p - c_v \quad (4.7)$$

Οι σχέσεις ορισμού των ειδικών θερμοχωρητικότητων είναι οι εξής:

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p, c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v \quad (4.8)$$

και κάνοντας χρήση του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος προκύπτει:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p, c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v \quad (4.9)$$

όπου με h συμβολίζεται η ενθαλπία του ρευστού ανά μονάδα μάζας. Η ενθαλπία (στατική) συνδέεται με την εσωτερική ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (4.10)$$

Για τον υπολογισμό των ειδικών θερμοχωρητικότητων με την παραδοχή των τελείων αερίων απαιτείται μόνο η γνώση της θερμοκρασίας, της οποίας η μεταβολή θεωρείται μικρή και, επομένως, οι θερμοχωρητικότητες μπορούν να θεωρηθούν σταθερές. Επομένως:

$$e = c_v T, h = c_p T \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια, μπορεί να οριστεί ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής γ ως εξής:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (4.12)$$

Έτσι, η εξίσωση 4.2 που δίνει την ολική ενέργεια, μπορεί να γραφεί:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_r u_r \quad (4.13)$$

Επίσης, η ολική ενθαλπία δίνεται από τη σχέση:

$$h_t = \frac{E + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} u_r u_r \quad (4.14)$$

Πριν τη διακριτοποίηση, οι εξισώσεις 4.1 αδιαστατοποιούνται με χρήση κατάλληλων αδιάστατων ποσοτήτων (μεγέθη «αναφοράς» ή reference) .

Τα βασικά μεγέθη των εξισώσεων 4.1 αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \hat{u}_i = \frac{u_i}{U_{ref}}, \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (4.15)$$

όπου με L_{ref} συμβολίζεται το μήκος αδιαστατοποίησης, με U_{ref} η ταχύτητα αδιαστατοποίησης και με ρ_{ref} η πυκνότητα αδιαστατοποίησης. Με το σύμβολο «^» συμβολίζονται οι αδιάστατες ποσότητες.

Επίσης ορίζεται:

$$\widehat{R}_g = \gamma - 1 \quad (4.16)$$

οπότε

$$R_{g,ref} = c_v \quad (4.17)$$

Τα μεγέθη αναφοράς για τα υπόλοιπα μεγέθη θα υπολογιστούν αντικαθιστώντας τις αδιάστατες ποσότητες στις εξισώσεις και συγκρίνοντας τη νέα μορφή με των εξισώσεων με την προηγούμενη.

Έτσι προκύπτουν (Καββαδίας, 2011):

- Για την πίεση: $p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$
- Για τη θερμοκρασία: $T_{ref} = \frac{U_{ref}^2}{c_v}$
- Για τις θερμοχωρητικότητες: $c_{p,ref} = c_v, \quad c_{v,ref} = c_v$
- Για την εσωτερική ενέργεια: $e_{ref} = U_{ref}^2$
- Για την ενθαλπία: $h_{ref} = U_{ref}^2$
- Για την ολική ενέργεια: $E_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$

Επομένως προκύπτουν τα εξής αδιάστατα μεγέθη:

$$\hat{p} = \frac{p}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \hat{T} = \frac{T}{U_{ref}^2 / c_v}, \hat{e} = \frac{e}{U_{ref}^2}, \hat{h} = \frac{h}{U_{ref}^2}, \hat{E} = \frac{E}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (4.18)$$

και ισχύει:

$$\hat{c}_p = \gamma, \hat{c}_v = 1 \quad (4.19)$$

Κεφάλαιο 4-Περιγραφή του επιλύτη ΥΡΔ

Στη συνέχεια γράφεται το σύστημα των εξισώσεων 4.1 με χρήση των διανυσμάτων \vec{U} και \vec{F}_γ ώστε οι εξισώσεις να έρθουν στην μορφή της εξίσωσης 4.5 (μετά από τις κατάλληλες πράξεις και αντικαταστάσεις) .

Ολόκληρη η διαδικασία της αδιαστατοποίησης έχει βασιστεί ουσιαστικά στον ορισμό των μεγεθών αναφοράς L_{ref} , U_{ref} , και ρ_{ref} . Σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, όπως αυτό που μελετάται στο κεφάλαιο 5, συνήθως δίνεται η στατική πυκνότητα και η ταχύτητα στο επ' άπειρον όριο και τα μεγέθη αναφοράς επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε η επ' άπειρον πυκνότητα και ταχύτητα να ισούνται με 1.

Όσον αφορά τον ψευδοχρονικό όρο που προαναφέρθηκε ότι χρησιμοποιείται, έχει προστεθεί για διευκόλυνση της σύγκλισης των εξισώσεων σύμφωνα με την τεχνική της χρονοπροέλασης. Για επιτάχυνση της σύγκλισης εφαρμόζεται η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος και υπολογίζεται ψευδοχρονικό βήμα για κάθε κόμβο, το οποίο εξαρτάται και από τον αριθμό CFL (Courant-Friedrichs-Levy) (Καββαδίας, 2011).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης

5.1 Θεωρία αεροελαστικότητας και αεροελαστικής σύζευξης

5.1.1 Αεροελαστικότητα

Η αεροελαστικότητα είναι το πεδίο εκείνο της επιστήμης που εξετάζει την αλληλεπίδραση μιας παραμορφώσιμης ελαστικής κατασκευής με ένα ρεύμα αέρα που προκαλεί σ' αυτήν αεροδυναμικές φορτίσεις (AER). Η αεροελαστικότητα αποτελεί υποκατηγορία της λεγόμενης Αλληλεπίδρασης Ρευστών-Στερεών (Fluid-Structure Interaction, FSI).

Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.1**, στην μελέτη του αεροελαστικού προβλήματος εμπλέκονται τρεις βασικοί τομείς, η αεροδυναμική, η ελαστικότητα και η δυναμική. Η συνεισφορά της αεροδυναμικής είναι ο υπολογισμός των φορτίσεων που δέχεται ένα αεροδυναμικό σώμα, η συνεισφορά της θεωρίας ελαστικότητας είναι ο υπολογισμός των παραμορφώσεων που δέχεται το σώμα από τις αεροδυναμικές φορτίσεις ενώ η συνεισφορά της δυναμικής είναι η μελέτη των ταλαντώσεων και συναφών φαινομένων που εμφανίζονται σε αεροπορικές κατασκευές.



Σχήμα 5.1: Διάφοροι τομείς σχετιζόμενοι με την αεροελαστικότητα (AER).

Τα τρία είδη δυνάμεων που εμφανίζονται σε ένα αεροελαστικό πρόβλημα όπως προαναφέρθηκε, είναι οι δυνάμεις αδράνειας (σχετικές με τη δυναμική), οι δυνάμεις ελαστικότητας και οι αεροδυναμικές δυνάμεις.

Δομές όπως τα αεροσκάφη, δεν μπορούν να θεωρηθούν εντελώς απαραμόρφωτες και γι' αυτό όταν ασκούνται πάνω τους αεροδυναμικά φορτία δημιουργούνται παραμορφώσεις, κάτι που αποτελεί αεροελαστικό φαινόμενο. Σε ένα αεροελαστικό φαινόμενο υπάρχει συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ του ρευστού που ασκεί τις αεροδυναμικές φορτίσεις και του στερεού που παραμορφώνεται δεχόμενο τις φορτίσεις, προκαλώντας στη συνέχεια

μεταβολές στη ροή. Αυτή η αλληλεπίδραση εξασθενεί εάν οι συνθήκες επιτρέψουν να επικρατήσει ισορροπία ή μπορεί να ενισχυθεί μέχρι να καταστραφεί η κατασκευή εάν προκύψει συντονισμός (AER).

Στην παρούσα εργασία, θα μελετηθεί η απλούστερη περίπτωση, αυτή της **στατικής αεροελαστικότητας**, για την οποία κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια.

Η στατική αεροελαστικότητα έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων του αεροδυναμικού φορτίου που δημιουργείται από σταθερή ροή με την επαγόμενη ελαστική παραμόρφωση των αεροδυναμικών επιφανειών ενός σώματος. Επομένως, η στατική αεροελαστικότητα ασχολείται με φαινόμενα που δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα και την επιτάχυνση των αεροδυναμικών επιφανειών. Στην περίπτωση της στατικής αεροελαστικότητας μελετώνται οι ελαστικές και αεροδυναμικές φορτίσεις ενώ αγνοούνται οι αδρανειακές φορτίσεις (AER).

Η στατική αεροελαστικότητα ασχολείται με δύο βασικά αντικείμενα: την επίδραση της ελαστικής παραμόρφωσης στο αεροδυναμικό φορτίο και την στατική αστάθεια που μπορεί τελικά να οδηγήσει σε αστοχία. Η στατική αστάθεια ονομάζεται και απόκλιση (divergence) και είναι αυτή που καθορίζει τα όρια της πτητικής κατάστασης. Στη συνέχεια θα γίνει μια σύντομη αναφορά στους μηχανισμούς της στατικής αστάθειας για διάφορα είδη απλών μοντέλων που χρησιμοποιούνται (AER).

Οι τρεις βασικοί τρόποι στήριξης των μοντέλων αεροτομών είναι (AER): α) στήριξη στο τοίχωμα, β) στήριξη σε πρόβολο και γ) στήριξη με υποστηρίγματα.

Πριν περιγραφούν τα βασικά μοντέλα της στατικής αεροελαστικότητας, θεωρήθηκε σκόπιμο να γίνει μια αναφορά στους βασικούς αεροελαστικούς «τελεστής» (Bisplinghoff & Ashley, 1975) (WIK), ορισμένες βασικές ποσότητες για την αεροελαστικότητα.

Ένας «δομικός τελεστής»: Σε κάθε γραμμικά ελαστική δομή, υπάρχει μια απλή σχέση που συνδέει τη δύναμη με τη μετατόπιση με τρόπο όπως σε ένα ελατήριο:

$$F = Kx \quad (5.1)$$

Η σταθερά του ελατηρίου K μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας «δομικός τελεστής».

Ένας αεροδυναμικός τελεστής: Η βασική σχέση της αεροδυναμικής μεταξύ της άνωσης στη μόνιμη κατάσταση L_0 και της γωνίας πρόσπτωσης α_0 για αεροτομή είναι:

$$L_0 = (a_0 q S) a_0 \quad (5.2)$$

όπου $S = l^* c = (\text{μήκος πτέρυγας}) \cdot (\text{μήκος χορδής αεροτομής})$ είναι η επιφάνεια της πτέρυγας και q είναι η δυναμική πίεση πτήσης. Η ποσότητα στην παρένθεση στη **σχέση 5.2** είναι ένας αεροδυναμικός τελεστής που συνδέει τη γωνία πρόσπτωσης με την δύναμη άνωσης που ασκείται στην πτέρυγα.

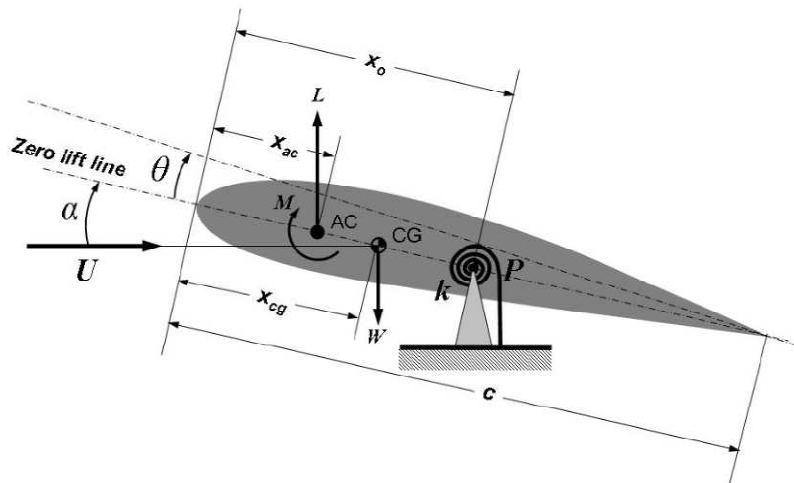
Οι βασικές ποσότητες και σχέσεις που χρησιμοποιούνται στην αεροελαστικότητα είναι θεμελιώδεις ποσότητες και σχέσεις τόσο της αεροδυναμικής όσο και της δομικής μηχανικής

όπως: η ταχύτητα του ήχου, ο συντελεστής άνωσης και ο συντελεστής αντίστασης, η εξίσωση της ελαστικής γραμμής, η σχέση τάσης-παραμόρφωσης, κτλ.

α) Περιγραφή μοντέλου με στήριξη στο τοίχωμα

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρείται ένα στερεό μοντέλο για την πτέρυγα με σταθερή μορφή αεροτομής. Η έδραση προσομοιώνεται με ένα στρεπτικό ελατήριο σταθεράς k . Η γωνία πρόσπτωσης θεωρείται μικρή (AER).

Το μοντέλο αυτό εικονίζεται στο **Σχήμα 5.2**:



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου με στήριξη στο τοίχωμα (AER).

Χρησιμοποιώντας απλές σχέσεις αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα στην οποία συμβαίνει απόκλιση σ' αυτή την περίπτωση είναι:

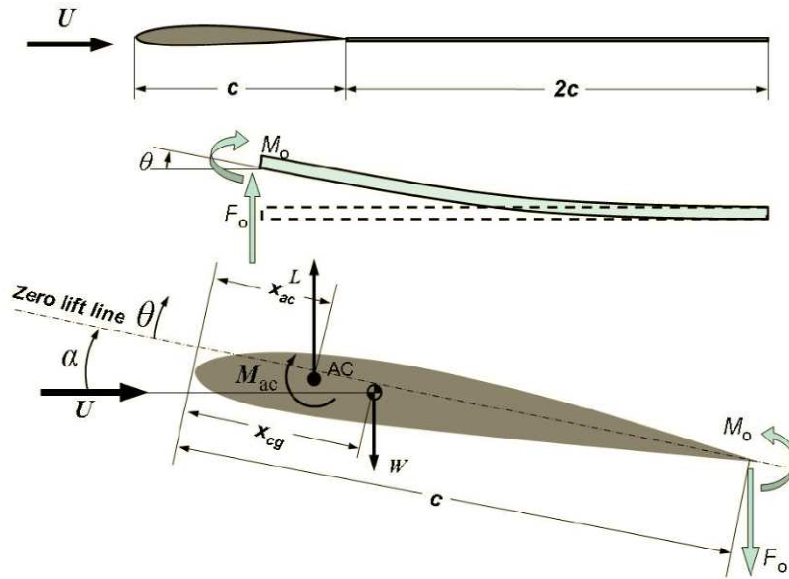
$$U_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho_{\infty} S C_{La} (x_0 - x_{ac})}} \tag{5.3}$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου, ρ_{∞} η επ' άπειρον πυκνότητα, S η επιφάνεια της πτέρυγας, C_{La} η κλίση της καμπύλης άνωσης, x_0 η θέση του άξονα περιστροφής της πτέρυγας και x_{ac} η θέση του αεροδυναμικού κέντρου. Το φαινόμενο της στατικής αεροελαστικής αστάθειας μπορεί να συμβεί μόνο εάν $x_0 > x_{ac}$, οπότε η υπόρριζη ποσότητα της **σχέσης 5.3** είναι θετική (AER).

β) Μοντέλο στηριγμένο σε πρόβολο

Το μοντέλο που είναι στηριγμένο σε πρόβολο απεικονίζεται στο **Σχήμα 5.3**. Όταν η δοκός δεν είναι παραμορφωμένη, η πτέρυγα έχει γωνία πρόσπτωσης α_r ενώ μετά την παραμόρφωση έχει γωνία πρόσπτωσης $\alpha_r + \theta$. Στην δοκό ασκούνται η δύναμη F_0 και η ροπή M_0 που είναι ίσες κατά μέτρο και έχουν αντίθετο πρόσημο με τη ροπή και τη δύναμη στη στήριξη του μοντέλου. Η δοκός έχει δυσκαμπτότητα EI και μήκος $2D$ (AER).

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης



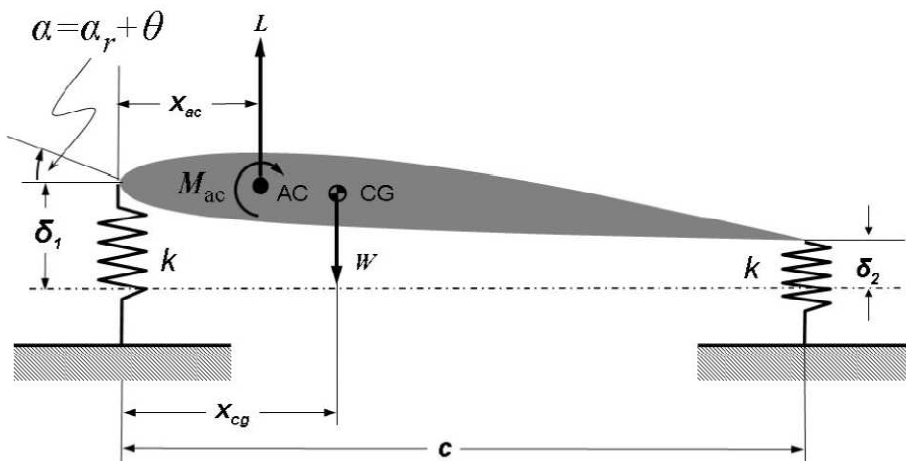
Σχήμα 5.3: Μοντέλο στηριγμένο σε πρόβολο (AER).

Σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύεται ότι απόκλιση συμβαίνει όταν η δυναμική πίεση q λαμβάνει τιμή ίση με q_{div} :

$$q_{div} = \frac{EI}{2(2 - \frac{x_{ac}}{D})D^2SC_{La}} \quad (5.4)$$

γ) Στήριξη με υποστηρίγματα

Το μοντέλο στήριξης με υποστηρίγματα παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4. Τα δύο υποστηρίγματα έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου και η στήριξη γίνεται στα δύο άκρα της πτέρυγας. Η γωνία πρόσπτωσης α περιλαμβάνει και την ελαστική παραμόρφωση.



Σχήμα 5.4: Μοντέλο στήριξης σε υποστηρίγματα (AER).

Η τιμή της δυναμικής πίεσης για την οποία συμβαίνει απόκλιση είναι η εξής (AER):

$$q_{div} = \frac{k_c}{SC_{La}(1 - \frac{x_{ac}}{c})} \quad (5.5)$$

Ένα άλλο φαινόμενο που μελετάται από την στατική αεροελαστικότητα είναι η επίδραση της παραμόρφωσης των κύριων επιφανειών άνωσης (main lifting surface) στην απόδοση των επιφανειών ελέγχου. Το φαινόμενο στην αγγλική γλώσσα ονομάζεται Control Surface reversal. Ένα τέτοιο φαινόμενο έχει αρνητικές συνέπειες στην ελεγχσιμότητα του αεροσκάφους. Μάλιστα οι επιφάνειες ελέγχου μπορεί να αντιστρέψουν την λειτουργία τους με αποτέλεσμα η επιθυμητή κίνηση για τον πιλότο να μην επιτυγχάνεται με τον ορθό τρόπο (WIK).

Λόγω της ανεπαρκούς δυσκαμπτότητας σε στρέψη, είναι δυνατόν, για μεγάλα αεροδυναμικά φορτία να συστραφεί η πτέρυγα. Με αυτόν τον τρόπο η στροφή της πτέρυγας από τον πιλότο οδηγεί σε αντίθετο αποτέλεσμα π.χ. αντί για ανοδική κίνηση, επιτυγχάνεται καθοδική. Παρόμοια προβλήματα συνήθως συμβαίνουν σε μεγάλες ταχύτητες πτήσης. Ορισμένες γνωστές περιπτώσεις αεροσκαφών που αντιμετώπισαν τέτοια προβλήματα ήταν το ανεμόπτερο των αδερφών Wright και τα αεροσκάφη Supermarine Spitfire και Boeing B-47 (WIK).

5.1.2 Μέθοδοι αεροελαστικής σύζευξης

Το φαινόμενο της σύζευξης μεταξύ ενός ρευστού και μιας στερεής δομής (αλληλεπίδραση) μπορεί να γίνει κατανοητή σαν ένας κύκλος κατά τον οποίο η κίνηση ή η παραμόρφωση του σχήματος του στερεού προκαλεί μεταβολή στη ροή. Αφού η ροή μεταβάλλεται, το πεδίο της πίεσης πάνω στο στερεό αλλάζει και η κίνηση ή η παραμόρφωση του στερεού αλλάζει, κτλ. Έτσι φαίνεται ότι η μεταβολή στη ροή και την κατάσταση του στερεού είναι πεπλεγμένα φαινόμενα. Η επίδραση του ενός φαινομένου στο άλλο γίνεται μέσω οριακών συνθηκών από το στερεό στο ρευστό και από το ρευστό στο στερεό μέσω του πεδίου των πιέσεων.

Όλες σχεδόν οι αεροελαστικές μέθοδοι βασίζονται σε αυτόν τον απλό κύκλο (Pierro, 1992).

5.1.2.1 Προσεγγίσεις Σύζευξης

Είναι γεγονός ότι τα διάφορα προβλήματα αλληλεπίδρασης ρευστών-στερεών επιλύονται καλύτερα με διαφορετικές μεθόδους σύζευξης, ανάλογα με την πολυπλοκότητα του φαινομένου και το κατά πόσο αλληλεπιδρά το ρευστοδυναμικό με το ελαστικό-δομικό μέρος.

Στην βιβλιογραφία (Akgul, 2012), (Kamakoti & Shyy, 2005) αναφέρονται τρεις γενικές κατηγορίες σύζευξης οι οποίες και αναλύονται στη συνέχεια:

α) Προσέγγιση πλήρους σύζευξης (Fully Coupled Approach)

Σύμφωνα με την προσέγγιση πλήρους σύζευξης, τόσο οι εξισώσεις της ρευστοδυναμικής, όσο και οι εξισώσεις της δομικής μηχανικής (π.χ. ελαστικότητα) συνδυάζονται σε ένα ενιαίο σύνολο εξισώσεων και λύνονται μαζί έτσι ώστε να εξασφαλίζεται καλύτερη σύγκλιση και πιο ευσταθείς λύσεις (Akgul, 2012). Οι ερευνητές Hron και Turek παρουσίασαν μια συναφή

μέθοδο με χρήση ενός ALE μοντέλου (arbitrary Lagrange-Euler) για διδιάστατα προβλήματα (Hoffman, Jansson, & Stockli).

Οι εξισώσεις επαναδιατυπώνονται συνδυάζοντας τις εξισώσεις κίνησης της ρευστομηχανικής και της δομικής μηχανικής, οι οποίες επιλύονται και ολοκληρώνονται στον χρόνο ταυτόχρονα. Αξίζει να σημειωθεί ότι γίνεται χρήση κοινού πλέγματος. Το γεγονός ότι οι εξισώσεις της ρευστοδυναμικής πρέπει να επιλυθούν σε ένα σύστημα αναφοράς Euler και οι εξισώσεις της δομικής μηχανικής σε ένα Λαγκρανζιανό σύστημα, οδηγεί σε πιο «δύσκαμπτους» πίνακες και δυσκολεύει αρκετά την επίλυση σε συστήματα μεγάλης κλίμακας (Kamakoti & Shyy, 2005).

Ορισμένα προβλήματα αυτής της προσέγγισης είναι ότι πρέπει να γίνει συνδυασμένη επίλυση ενός Λαγκρανζιανού και ενός συστήματος Euler, ότι το ίδιο σχήμα χρονικής διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται δεν είναι επαρκές και ότι είναι δύσκολη η χρήση παράλληλης επεξεργασίας για τέτοιους κώδικες (Akgul, 2012).

Οι Dunne και Ranacher παρουσίασαν μια παραλλαγή της πλήρους συζευγμένης προσέγγισης, βασισμένη σε μια Euler διατύπωση του μοντέλου ρευστού-στερεού. Το μοντέλο περιλάμβανε τις εξισώσεις διατήρησης με μια γενικευμένη μεταβλητή τάσης και μια μεταβλητή μετατόπισης καθώς και μια πρόσθετη εξίσωση για τη διεπιφάνεια.

Τέλος, οι ερευνητές Hoffman, Jansson και Stöckli (Hoffman, Jansson, & Stockli) δημιούργησαν ένα «ενοποιημένο» μοντέλο συνεχούς μέσου σε σύστημα αναφοράς Euler με κινούμενο πλέγμα. Χρησιμοποίησαν εξισώσεις διατήρησης (μάζας, ορμής) και μια μεταβλητή για τις τάσεις Cauchy και για τον ορισμό των καταστατικών νόμων και τις ιδιότητες του στερεού. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε 3D τυρβώδεις ροές με αλληλεπίδραση ρευστών και στερεών.

β) Προσέγγιση κοντινής σύζευξης (Closely Coupled Approach) ή μέθοδος ισχυρά συζευγμένης αλληλεπίδραση ρευστών-στερεών

Είναι από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους που χρησιμοποιούνται στον τομέα της υπολογιστικής αεροελαστικότητας διότι όχι μόνο επιτρέπει τη χρήση διαφορετικών επιλυτών για το ρευστοδυναμικό και το δομικό πρόβλημα αλλά παράλληλα διατηρεί τους δύο επιλύτες στενά συζευγμένους μεταξύ τους μέσω μιας «διεπιφάνειας» στην οποία γίνεται η ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ των επιλυτών και αποτελεί μια πολύ αποδοτική μέθοδο για σύνθετα μη-γραμμικά προβλήματα (Kamakoti & Shyy, 2005). Σε αυτήν την προσέγγιση, δεν χρησιμοποιείται κάποια επαναληπτική μέθοδος μεταξύ των δύο επιλυτών αλλά οι βαθμοί ελευθερίας στο όριο ρευστού-στερεού είναι συζευγμένοι στο ίδιο αλγεβρικό σύστημα, (το οποίο επιλύεται με μια μέθοδο Newton) αυξάνοντας θεωρητικά την ευστάθεια (Hoffman, Jansson, & Stockli).

Η πληροφορία που ανταλλάσσεται είναι τα επιφανειακά φορτία που απεικονίζονται από το επιφανειακό πλέγμα του ρευστοδυναμικού επιλύτη, στο πλέγμα της δομικής μηχανικής και το πεδίο των μετατοπίσεων, που απεικονίζεται από τον πλέγμα του επιλύτη της δομικής μηχανικής στο πλέγμα του ρευστοδυναμικού επιλύτη. Η μεταφορά της πληροφορίας για την επιφανειακή παραμόρφωση όταν επιστρέφει στο ρευστοδυναμικό κομμάτι απαιτεί την

κατάλληλη παραμόρφωση του επιφανειακού πλέγματος (Kamakoti & Shyy, 2005). Σε κάθε χρονικό βήμα χρησιμοποιείται ένας επιπρόσθετος εσωτερικός βρόχος για την σύγκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο κωδικών ώστε να γίνεται πιο ευσταθής η λύση και να υπάρχει καλύτερη σύγκλιση (Akgul, 2012).

Έχουν αναπτυχθεί αρκετοί διαφορετικοί τρόποι για τη σύζευξη μέσω αυτής της προσέγγισης. Ενδεικτικά, ορισμένοι ερευνητές που έχουν κατασκευάσει σχετικά μοντέλα είναι ο Cunningham, οι Lee-Rausch, οι Bennett και Edwards, ο Huttzell, ο Kamakoti, κ.α. (Kamakoti & Shyy, 2005).

γ) Προσέγγιση χαλαρής σύζευξης (Loosely ή weakly coupled approach)

Μια ευθεία και ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την επίλυση ενός συζευγμένου ρευστοδυναμικού και δομικού προβλήματος είναι ο χωρισμός του χωρίου επίλυσης σε ένα πεδίο ρευστοδυναμικής επίλυσης και ένα πεδίο δομικής επίλυσης. Σε αυτήν την προσέγγιση οι εξισώσεις της ρευστοδυναμικής και της δομικής μηχανικής λύνονται με τελείως ανεξάρτητους επιλύτες. Η επικοινωνία των δύο κωδικών είναι μόνο εξωτερική και η ανταλλαγή των πληροφοριών γίνεται μόνο μετά από μερική ή ολική σύγκλιση και των δύο επιλυτών.

Η βασική απαίτηση είναι η δημιουργία ενός κατάλληλου τρόπου σύζευξης των δύο επιλυτών. Το γεγονός ότι η ανταλλαγή πληροφοριών γίνεται μόνο μια φορά σε κάθε χρονικό βήμα έχει το μειονέκτημα ότι υπάρχει μειωμένη ακρίβεια και άρα εφαρμόζεται κυρίως σε απλά και γραμμικά προβλήματα (Akgul, 2012). Μετά το χωρισμό στα δύο υπό-προβλήματα λαμβάνει χώρα μια επαναληπτική μέθοδος με τα εξής βήματα (Hoffman, Jansson, & Stockli):

- Υποτίθενται κάποιες μετατοπίσεις στο όριο ρευστού-στερεού για να επιλυθεί το ρευστομηχανικό πρόβλημα στον χώρο επίλυσής του.
- Υπολογίζονται οι τάσεις και μετά οι δυνάμεις που ασκούνται στο όριο ρευστού-στερεού.
- Αυτές οι δυνάμεις χρησιμοποιούνται ως οριακές συνθήκες για την επίλυση του δομικού προβλήματος.
- Υπολογίζονται οι μετατοπίσεις στο όριο ρευστού-στερεού.
- Γίνεται έλεγχος σύγκλισης και αν δεν έχει συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος ακολουθούνται ξανά τα βήματα από την αρχή κτλ.

5.1.2.2 Μέθοδοι μετακίνησης πλέγματος

Καθώς η παραμόρφωση του στερεού πρέπει να γίνει αντιληπτή και στο πεδίο επίλυσης του ρευστοδυναμικού προβλήματος, πρέπει να γίνεται η κατάλληλη πλεγματοποίηση ολόκληρου του πεδίου επίλυσης σε κάθε αεροελαστικό κύκλο. Επίσης, το κινούμενο πλέγμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε μη-μόνιμα προβλήματα όπως π.χ. ο πτερυγισμός (flutter) στις πτέρυγες του αεροσκάφους. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι οι οποίες εμφανίζουν ορισμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Η μέθοδος των ανάλογων ελατηρίων χρησιμοποιείται για τη δημιουργία δομημένων και μη-δομημένων δυναμικών πλεγμάτων. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χειριστεί και περιπτώσεις με

μεγάλες παραμορφώσεις αλλά είναι ιδιαίτερα δαπανηρή σε υπολογιστικό χρόνο σε αυτές τις περιπτώσεις. Οι Schuster και Bhardwaj χρησιμοποίησαν μια απλή αλγεβρική τεχνική για να ανακατανεύσουν τους κόμβους του πλέγματος κατά μήκος των πλεγματικών γραμμών που είναι σε κάθετη διεύθυνση προς την επιφάνεια. Ο Eriksson χρησιμοποίησε μια μέθοδο παρεμβολής με τρία στάδια για απλά χωρία. Αυτές οι δύο μέθοδοι είναι πιο οικονομικές αλλά έχουν προβλήματα ακρίβειας σε πολύπλοκα χωρία. Άλλες κατηγορίες μεθόδων περιλαμβάνουν και τον συνδυασμό απλούστερων μεθόδων.

5.1.2.3 Βασικές τεχνικές παρεμβολής

Ένας επιτυχημένος κώδικας αεροελαστικής σύζευξης εκτός του ρευστομηχανικού και του δομικού τμήματα και της μεθόδου μετακίνησης του πλέγματος που χρησιμοποιεί, πρέπει να περιλαμβάνει και μια αποδοτική διαδικασία σύζευξης, δηλαδή μεταφοράς της πληροφορίας μεταξύ των δύο τμημάτων. Όπως έχει προαναφερθεί, σε κάθε χρονικό βήμα (αν πρόκειται για μη-μόνιμο πρόβλημα) πρέπει να μεταφερθεί η πληροφορία για τα αεροδυναμικά φορτία από το πλέγμα του κώδικα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής στο πλέγμα του κώδικα δομικής μηχανικής και η πληροφορία για τις μετατοπίσεις στο πλέγμα του κώδικα της δομικής μηχανικής.

Τόσο οι ερευνητές Smith, Hodges και Cesnik όσο και οι Kamakoti και Shyy στις δημοσιεύσεις (Smith, Hodges & Cesnik, 2000), (Kamakoti & Shyy, 2005) ασχολούνται με την ανασκόπηση των μεθόδων παρεμβολής, και ορισμένα από τα βασικά σημεία των εργασιών τους παρατίθενται στη συνέχεια:

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από το πώς έχουν μοντελοποιηθεί το ρευστό και το στερεό που εμπλέκονται στην αεροελαστική ανάλυση ώστε να διατηρείται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Συνήθως το πλέγμα που χρησιμοποιείται στην δομική ανάλυση είναι αραιότερο από αυτό της ρευστοδυναμικής ανάλυσης, άρα απαιτείται μια ακριβής τεχνική παρεμβολής για να μεταφερθούν τα επιφανειακά φορτία από το πλέγμα που χρησιμοποιείται στον επιλύτη ρευστοδυναμικής στο πλέγμα του επιλύτη δομικής ανάλυσης. Ορισμένες από τις πιο συνηθισμένες είναι οι εξής:

- Μέθοδος IPS (Infinite-plate splines)

Η μέθοδος IPS είναι από τις γνωστότερες και πιο χρησιμοποιημένες τεχνικές παρεμβολής (μάλιστα χρησιμοποιείται και από εμπορικά λογισμικά όπως το PATRAN/NASTRAN). Βασίζεται στην υπέρθεση των λύσεων των εξισώσεων ισορροπίας πάνω σε μια άπειρη πλάκα. Για ένα σύνολο N διακριτών σημείων με συντεταγμένες x_i ($i=1,2$) που βρίσκονται σε ένα διδιάστατο καρτεσιανό επίπεδο, αντιστοιχίζεται μια μετατόπιση H σε καθένα από αυτά ώστε να ορίζεται η συντεταγμένη της καθέτου στην επιφάνεια που θεωρείται ότι βρίσκονται τόσο τα σημεία του πλέγματος του επιλύτη δομικής μηχανικής όσο και τα σημεία του ρευστοδυναμικού επιλύτη. Για ένα 1D πρόβλημα, η εξίσωση για το H δίνεται από τη σχέση:

$$H(x) = \sum_{i=1}^N \{A_i + b_i(x - x_i)^2 + F_i(x - x_i)^2 \ln(x - x_i)^2\} \quad (5.6)$$

και απαιτείται ο προσδιορισμός των συντελεστών A_i , B_i , F_i . Οι υπολογισμοί των φορτίων γίνονται με επίλυση της εξίσωσης της άπειρης πλάκας. Τα φορτία θεωρείται ότι ασκούνται σε γνωστά σημεία και είναι υπεύθυνα για την παραμόρφωση του στερεού. Επίσης, με δεδομένες τις μετατοπίσεις των σημείων του «δομικού» πλέγματος είναι πιθανόν να γίνει παρεμβολή αυτών των μετατοπίσεων στα σημεία του ρευστοδυναμικού πλέγματος τα οποία δεν ταιριάζουν συνήθως με τα σημεία του «δομικού» πλέγματος.

Ορισμένα επιπλέον χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι ότι το πλέγμα δεν απαιτείται να είναι ορθογωνικό, η συνάρτηση παρεμβολής είναι παντού διαφορίσιμη και υπάρχουν περιορισμοί στο ότι απαιτείται πλέγμα με πάνω από 3 σημεία και ότι η παρεμβολή είναι γραμμική.

- Μέθοδος MQ (Multi-quadratic-biharmonic)

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί μια «ανώμαλη» δευτεροβάθμια επιφάνεια (στις περισσότερες φορές ένα δίχωνο υπερβολοειδές) κάνοντας χρήση δευτεροβάθμιων συναρτήσεων βάσης. Χρησιμοποιείται για παρεμβολή σε διάφορες τοπογραφίες. Η σχέση που χρησιμοποιείται για την μετατόπιση H είναι:

$$H(x) = \sum_{i=1}^N a_i [(x - x_i)^2 + r^2]^{1/2} \quad (5.7)$$

όπου το r είναι μια παράμετρος που εισάγεται από τον χρήστη και ελέγχει το σχήμα των συναρτήσεων βάσης. Για διάφορες τιμές του r , η συνάρτηση μπορεί να έχει τη μορφή επιπέδου ή ακόμα και κώνου.

Και σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση παρεμβολής είναι διαφορίσιμη για μη-μηδενικές τιμές του r , αλλά εδώ είναι ακόμα πιο αποδοτική σε σχέση με τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για την επίλυσή της.

- Μέθοδος TPS (Thin plate splines)

Η μέθοδος TPS είναι μια άλλη μεθοδολογία παρεμβολής, κοντινή στην MQ η οποία χρησιμοποιεί μια «ανώμαλη» επιφάνεια και συναρτήσεις που ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό της ενέργειας. Η διαφορά των δύο μεθόδων είναι η εξίσωση που επιλύεται. Η βασική σχέση για την μέθοδο TPS είναι η:

$$H(x) = \sum_{i=1}^N a_i |x - x_i|^2 \log |x - x_i| \quad (5.8)$$

Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει το πρόβλημα από με μια «φυσική» ή «τεχνολογική» αναπαράσταση της επιφάνειας, διότι π.χ. για ένα 1D πρόβλημα οι θεμελιώδεις κυβικές splines μπορούν να θεωρηθούν ως θέσεις ισορροπίας για μια δοκό με καμπτική παραμόρφωση και για το 2D πρόβλημα μπορεί να θεωρηθούν ως θέσεις ισορροπίας μιας λεπτής πλάκας (όπως θεωρείται στην μέθοδο IPS).

Αυτή η μέθοδος, λόγω της χρήσης των καμπύλων splines είναι χρήσιμη για κινούμενες ή ευλύγιστες επιφάνειες. Μπορεί να επεκταθεί και σε τριδιάστατες εφαρμογές.

- Μέθοδος FPS (Finite Plate Spline)

Στη μέθοδο FPS χρησιμοποιούνται ομοιόμορφα στοιχεία πλάκας για να αναπαρασταθεί μια επιφάνεια με τετραπλευρικά ή τριγωνικά στοιχεία. Αυτή η εικονική επιφάνεια χρησιμοποιείται για την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των πλεγμάτων των δύο επιλυτών. Συνήθως χρησιμοποιούνται διάφορα στοιχεία πλάκας τύπου C^1 για να λαμβάνονται καλά αποτελέσματα, όπως το κυβικό στοιχείο serendipity που χρησιμοποιεί ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών με 11 όρους.

Αυτή η μέθοδος μπορεί να διαχειριστεί αλλαγές στο μοντέλο ή το πλέγμα διότι βασίζεται περισσότερο σε θεωρήσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και ισχύει η διατήρηση του έργου των εξωτερικών δυνάμεων.

- Μέθοδος NUBS (Non-uniform B-splines)

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι μια τριδιάστατη επιφάνεια μπορεί να προκύψει σαν τανυστικό γινόμενο δύο καμπύλων splines. Γίνεται χρήση πολυωνυμικών B-splines για να δημιουργηθούν επιφάνειες στις 2 και τις 3 διαστάσεις αντί για NURBS διότι στην αεροελαστικότητα θεωρείται ότι οι NURBS έχουν την τάση να δημιουργούν αριθμητικά προβλήματα. Η σχέση που περιγράφει την επιφάνεια είναι η:

$$S_{kt}(x, y) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij} B_{ik}(x) B_{jt}(y) \quad (5.9)$$

όπου S είναι η επιφανειακή μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο (x,y) , τα P_{ij} είναι κατάλληλοι συντελεστές για την παρεμβολή των δεδομένων και B_{ik} , B_{jt} είναι οι B-splines στις κατευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

Η μέθοδος αυτή έχει χαμηλές απαιτήσεις σε μνήμη υπολογιστή.

- Μέθοδος IIM (Inverse Isoparametric Mapping)

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην ισοπαραμετρική θεώρηση που χρησιμοποιείται στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (και έχει περιγραφεί στο κεφάλαιο 2) η οποία χρησιμοποιεί συναρτήσεις μορφής για να κάνει παρεμβολή. Και αυτή η μέθοδος έχει χαμηλές απαιτήσεις σε μνήμη υπολογιστή και θεωρείται επίσης η πιο ακριβής μέθοδος παρεμβολής.

Σύμφωνα με την ισοπαραμετρική θεώρηση οι ίδιες συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται για να παρεμβληθεί και η γεωμετρία και οι μετατοπίσεις. Αυτή η παρεμβολή είναι ένα προς ένα μεταξύ του συστήματος συντεταγμένων ξ, η και του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων x, y . Η ιδέα της αντίστροφης ισοπαραμετρικής απεικόνισης είναι ότι για κάθε σημείο του καθολικού συστήματος, χρησιμοποιώντας αντίστροφες σχέσεις είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι τοπικές συντεταγμένες (ξ, η) . Αυτό γίνεται με επίλυση ενός μη-γραμμικού συστήματος, συνήθως με κάποια επαναληπτική μέθοδο.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου:

Αρχικά γίνεται μια σάρωση στο διδιάστατο πλέγμα για να εντοπιστούν οι τέσσερις κόμβοι του «δομικού» πλέγματος (στη συνέχεια θα αναφέρεται ως CSD πλέγμα) που βρίσκονται γύρω από κάθε κόμβο του ρευστοδυναμικού πλέγματος (στη συνέχεια θα αναφέρεται ως CFD πλέγμα).

Αφού εντοπιστεί το κελί που περιέχει το δεδομένο CFD σημείο, τότε λαμβάνει χώρα η αντίστροφη ισοπαραμετρική απεικόνιση. Να σημειωθεί ότι με x_m, y_m συμβολίζονται οι συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου στο καθολικό σύστημα, με (ξ, η) οι συντεταγμένες στο τοπικό σύστημα και με x_i, y_i οι συντεταγμένες των 4 σημείων του πλέγματος CSD που περιβάλλουν στο σημείο του πλέγματος CFD.

Αναπτύσσοντας τις σχέσεις:

$$x = \sum_i N_i(\xi) x_i^e, y = \sum_i N_i(\xi) y_i^e \quad (5.10)$$

και χρησιμοποιώντας τις παρακάτω διγραμμικές συναρτήσεις μορφής:

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), N_2 = \xi(1 - \eta), N_3 = (1 - \xi)\eta, N_4 = \xi\eta \quad (5.11)$$

(οι οποίες δεν ακολουθούν τον κλασσικό ορισμό των $\xi, \eta \in [-1, +1]$ αλλά ορίζονται στο $[0, 1]$) λαμβάνεται τελικά:

$$x_m = a_{x1}\xi\eta + a_{x2}\xi + a_{x3}\eta + a_{x4} \quad (5.12)$$

$$y_m = a_{y1}\xi\eta + a_{y2}\xi + a_{y3}\eta + a_{y4} \quad (5.13)$$

Αν επιλυθεί η **σχέση 5.13** ως προς το η :

$$\eta = \frac{y_m - a_{y2}\xi - a_{y4}}{a_{y1}\xi + a_{y3}} \quad (5.14)$$

Εάν ο παρονομαστής της **σχέσης (5.14)** είναι διάφορος του μηδενός και γίνει αντικατάσταση στην **σχέση 5.12** λαμβάνεται η σχέση υπολογισμού του ξ :

$$A\xi^2 + B\xi + C = 0 \quad (5.15)$$

όπου:

$$\begin{aligned} A &= a_{x2}a_{y1} - a_{x1}a_{y2} \\ B &= a_{y1}(x_m - a_{x4}) + a_{x3}a_{y2} - a_{x2}a_{y3} - a_{x1}(y_m - a_{y4}) \\ C &= a_{y3}(x_m - a_{x4}) - a_{x3}(y_m - a_{y4}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος έχει τον περιορισμό ότι δεν μπορεί να παρεμβάλει σημεία που βρίσκονται εκτός του πλέγματος (extrapolation) και αυτή η παρεμβολή γίνεται με άλλες τεχνικές.

5.1.2.4 Σύγκριση βασικών τεχνικών παρεμβολής

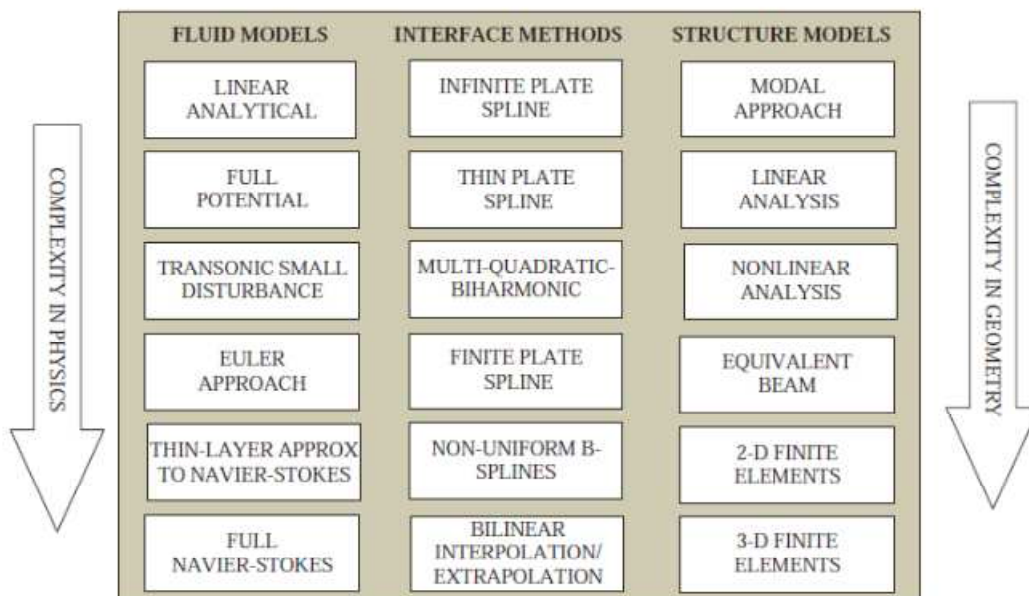
Στην βιβλιογραφία υπάρχουν έρευνες όσον αφορά την αποτελεσματικότητα κάθε μεθόδου και τις υπολογιστικές απαιτήσεις τους. Στη συνέχεια, παρατίθεται ένας συγκριτικός πίνακας (**Πίνακας 5.1**) για τις υπολογιστικές απαιτήσεις κάθε μεθόδου:

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης

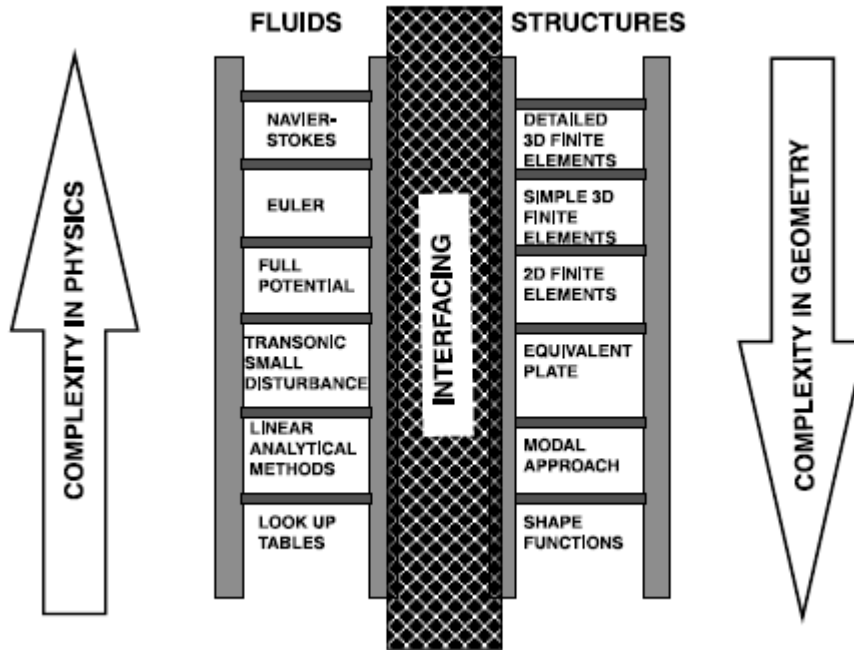
Μέθοδος	Σχετικός απαιτούμενος χρόνος CPU	Σχετική απαιτούμενη μνήμη
IPS	1.0	1.0
FPS	0.93	1.125
MQ	0.024	0.206
TPS	0.019	0.206
NUBS	0.024	0.094
IIM	0.031	0.0281

Πίνακας 5.1: Υπολογιστικές απαιτήσεις κάθε μεθόδου (Smith, Hodges & Cesnik, 2000).

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο σχήματα (Σχήμα 5.5, Σχήμα 5.6) που απεικονίζουν συγκεντρωτικά τις πιο συνηθισμένες μεθόδους ρευστοδυναμικής και δομικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται σε ρευστοδυναμικά προβλήματα καθώς και τις βασικές τεχνικές παρεμβολής που προαναφέρθηκαν.



Σχήμα 5.5: Πίνακας που απεικονίζει στην αριστερή στήλη τα ρευστοδυναμικά μοντέλα που μπορεί να χρησιμοποιηθούν στην αεροελαστική ανάλυση, στη δεξιά στήλη τα δομικά μοντέλα και στην κεντρική στήλη τις μεθοδολογίες παρεμβολής (Kamakoti & Shyy, 2005).



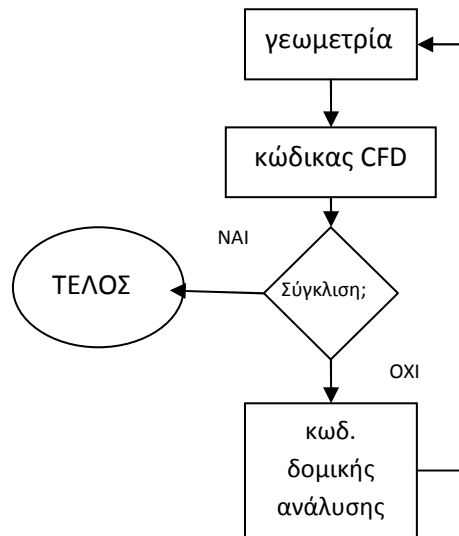
Σχήμα 5.6: Παρόμοιο διάγραμμα με το προηγούμενο αλλά με ορισμένες διαφορές στην κατάταξη των μεθόδων, σύμφωνα με τον Guruswamy (Guruswamy, 2001).

5.2 Κώδικας Αεροελαστικής ανάλυσης

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει αναφορά στον κώδικα που κατασκευάστηκε για την αεροελαστική ανάλυση, το συνδυασμό επίλυσης του δομικού και του ρευστοδυναμικού (αεροδυναμικού προβλήματος) της ροής ρευστού γύρω από μια πτέρυγα αεροσκάφους.

Ο κώδικας αποτελείται από διάφορα μέρη. Τα δύο κυριότερα είναι, όπως αναμένεται, ο κώδικας που επιλύει το δομικό πρόβλημα μιας πτέρυγας αεροσκάφους υπό την επίδραση αεροδυναμικών φορτίσεων και ο κώδικας που επιλύει τη ροή γύρω από την πτέρυγα του αεροσκάφους. Για τη δομική ανάλυση, επιλέχτηκε ο κώδικας ισοπαραμετρικών πεπερασμένων στοιχείων πλάκας που αναπτύχθηκε για την εργασία και παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο ενώ για το ρευστομηχανικό πρόβλημα επιλέχτηκε ο κώδικας f3d που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4, με κάποιες απαραίτητες τροποποιήσεις που θα σχολιαστούν στη συνέχεια.

Μετά τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίσεων από τον κώδικα ρευστομηχανικής, γίνεται επίλυση από τον κώδικα δομικής ανάλυσης και προκύπτουν οι παραμορφώσεις της πτέρυγας. Οι παραμορφώσεις αυτές τροφοδοτούν ξανά τον κώδικα ρευστομηχανικής ο οποίος επιλύει τη ροή γύρω από το μετατοπισμένο πτερύγιο και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να συγκλίνει αριθμητικά ο κύκλος και να ισορροπήσει η πτέρυγα (πρακτικά μέχρι να μην διαφέρουν σημαντικά οι υπολογιζόμενες δυνάμεις και μετατοπίσεις μεταξύ δύο συνεχόμενων κύκλων) διότι ασχολούμαστε μόνο με το μόνιμο (steady) φαινόμενο (στατική αεροελαστικότητα).



Σχήμα 5.7: Γενικό διάγραμμα ροής του κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης.

Το γενικό διάγραμμα ροής του κώδικα που υλοποιεί την αεροελαστική ανάλυση δίνεται στο **Σχήμα 5.7**. Θεωρείται όμως σκόπιμο να σχολιαστούν περαιτέρω κάποιες βασικές λεπτομέρειες της γενικής δομής του κώδικα.

Αρχικά, όπως προαναφέρθηκε, πρέπει να γίνει η επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα. Καλείται ο κώδικας «aero3D» ο οποίος αποτελεί μια τροποποιημένη «έκδοση» του f3d και περιλαμβάνει τις εξής επιπρόσθετες δυνατότητες:

- Δυνατότητα υπολογισμού των δυνάμεων στην πάνω και την κάτω πλευρά της πτέρυγας (πλευρά υποπίεσης και υπερπίεσης) και κατάλληλος υπολογισμός της συνισταμένης τους.

- Δυνατότητα εξαγωγής του επιφανειακού πλέγματος της πάνω επιφάνειας της πτέρυγας για να χρησιμοποιηθεί από τον κώδικα δομικής ανάλυσης.

- Δυνατότητα επίλυσης της ροής γύρω από την παραμορφωμένη πτέρυγα με χρήση κατάλληλων δεδομένων από αρχείο (που προσδιορίζουν τη νέα γεωμετρία) και, ύστερα, δημιουργίας ενός νέου «μετατοπισμένου» πλέγματος με τη χρήση «ιδεατών ελατηρίων» ώστε να μετακινηθεί το πλέγμα γύρω από την πτέρυγα και σε ένα τμήμα του συνολικού χώρου επίλυσης (γύρω από την πτέρυγα).

- Δυνατότητα εξαγωγής όλων των απαραίτητων αρχείων αποτελεσμάτων για να διευκολυνθεί η «επικοινωνία» μεταξύ των διαφόρων κωδίκων.

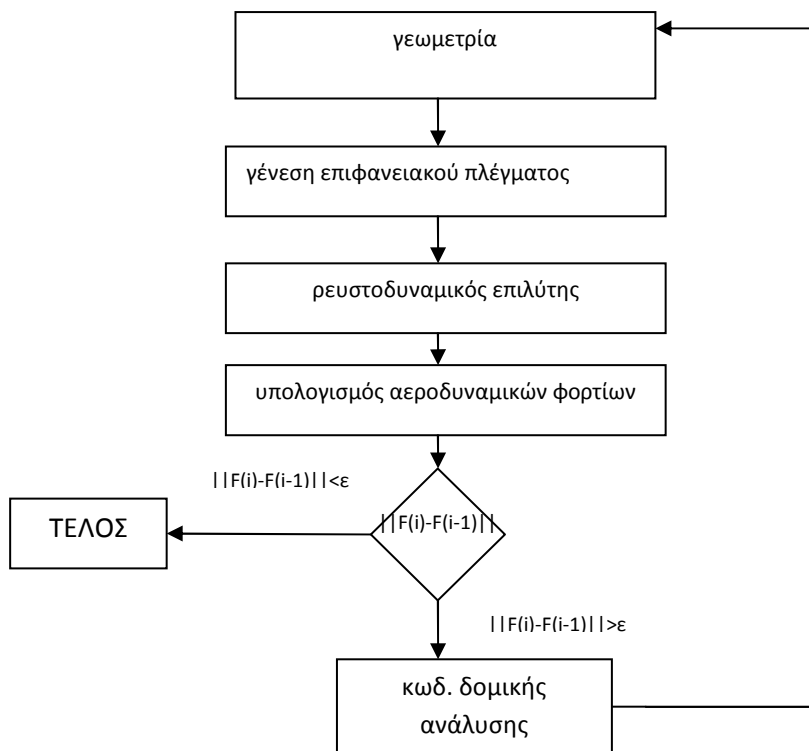
Επειδή ο κώδικας aero3D απαιτεί να διαβάσει τη νέα γεωμετρία σε κάθε κύκλο, στον πρώτο αεροελαστικό κύκλο δίνεται η αρχική γεωμετρία στον κώδικα (μετατόπιση 0). Μετά την επίλυση προκύπτουν διάφορα αρχεία με πιο σημαντικό το αρχείο που περιλαμβάνει τις δυνάμεις (F_x, F_y, F_z) σε κάθε κόμβο.

Αυτό το αρχείο δίνεται ως είσοδος στον κώδικα δομικής ανάλυσης, ο οποίος έχει τροποποιηθεί ώστε να διαβάζει τις δυνάμεις και το επιφανειακό πλέγμα του κώδικα

ρευστομηχανικής. Μετά την επίλυση και τον υπολογισμό των μετατοπίσεων παράγουμε το κατάλληλο αρχείο που δίνει στον κώδικα ρευστομηχανικής τη νέα γεωμετρία της παραμορφωμένης πτέρυγας και συνεχίζεται ο κύκλος.

Μετά από το τέλος της 2ης επίλυσης του ρευστομηχανικού κώδικα και μέχρι τον τελευταίο κύκλο, υπολογίζεται η διαφορά μεταξύ των υπολογιζόμενων δυνάμεων στον τρέχοντα κύκλο σε σχέση με τον προηγούμενο κύκλο και εάν η τιμή είναι μικρότερη από ένα κατώτερο όριο διακόπτεται η εκτέλεση του κώδικα και θεωρείται ότι έχει συγκλίνει η επίλυση.

Μετά την αναλυτική περιγραφή των τμημάτων του συνολικού κώδικα, δίνεται το αναλυτικό διάγραμμα ροής (Σχήμα 5.8) το οποίο παρουσιάζει σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα στάδια του αεροελαστικού κύκλου και της αλληλεπίδρασης των επιμέρους κωδίκων.



Σχήμα 5.8: Αναλυτικό διάγραμμα ροής του αεροελαστικού κώδικα.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν και θα σχολιαστούν αποτελέσματα από τη λειτουργία του κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης σε διάφορες περιπτώσεις.

5.3 Παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων επίλυσης διάφορων περιπτώσεων με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης

Στη συνέχεια θα γίνει διαχωρισμός με βάση τον κώδικα δομικής ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε: κώδικα ισοπαραμετρικών πεπερασμένων στοιχείων πλάκας και κώδικα

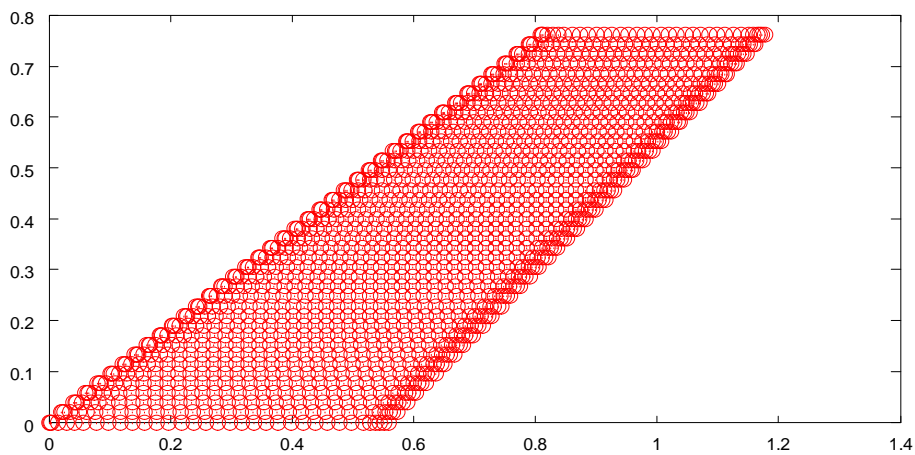
πεπερασμένων στοιχείων δοκού. Οι συνθήκες που θεωρούνται σε όλες τις περιπτώσεις στον ρευστοδυναμικό κώδικα είναι ίδιες με αυτές του Πίνακα 4.1.

5.3.1 Επίλυση με κώδικα δομικής ανάλυσης στοιχείου πλάκας

5.3.1.1 Επίλυση με χρήση κοινού επιφανειακού πλέγματος

Στην παρούσα υποενότητα θα γίνει χρήση του επιφανειακού πλέγματος πάνω στην πτέρυγα και από τον κώδικα δομικής ανάλυσης. Θα σχολιαστεί το αν είναι κατάλληλο και αποδοτικό να γίνει χρήση κοινού πλέγματος και κατά πόσον επηρεάζει άλλες παραμέτρους της επίλυσης.

Στο Σχήμα 5.9 παρουσιάζεται το επιφανειακό πλέγμα που χρησιμοποιείται. Το πλέγμα είναι κατάλληλα διαμορφωμένο για την επίλυση της ροής με τον κώδικα ρευστομηχανικής.



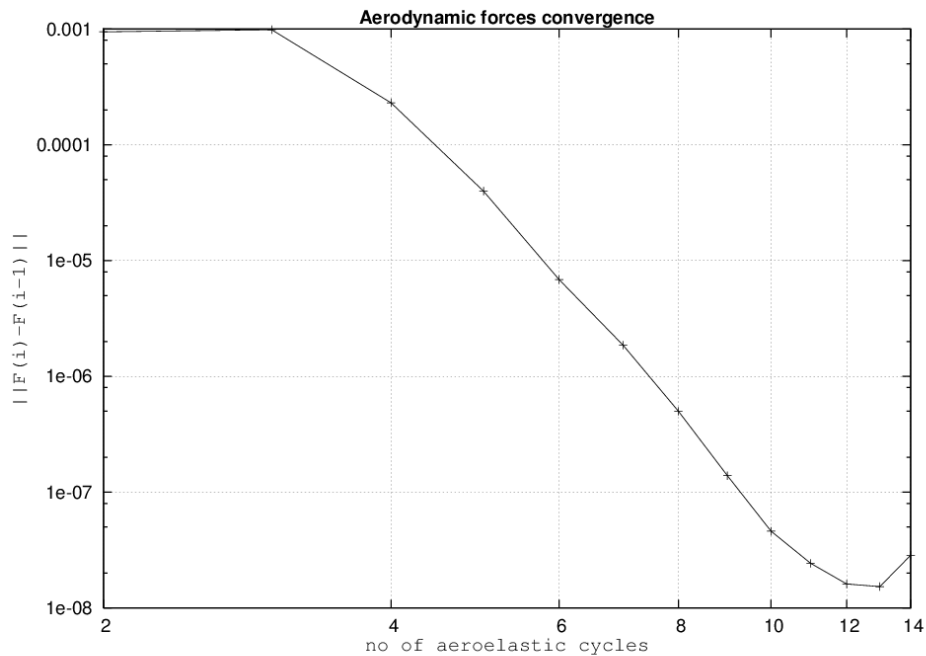
Σχήμα 5.9: Το επιφανειακό πλέγμα στην περίπτωση επίλυσης με ίδιο πλέγμα και στους δύο κώδικες.

Ο Πίνακας 5.2 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της επίλυσης με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	9.4567e-4
3	9.8659e-4
4	2.305e-4
5	3.979e-5
6	6.85e-6
7	1.862e-6
8	5.001e-7
9	1.3878e-7
10	4.6051e-8
11	2.42998e-8
12	1.6094e-8
13	1.5285e-8
14	2.85e-8

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση χρήσης ίδιου πλέγματος και στους δύο κώδικες ανάλυσης.

Πρακτικά θεωρήθηκε ότι αφού η διαφορά στις τιμές των δυνάμεων είναι της τάξης του 10^{-8} έχει συγκλίνει η διαδικασία επίλυσης. Στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων:

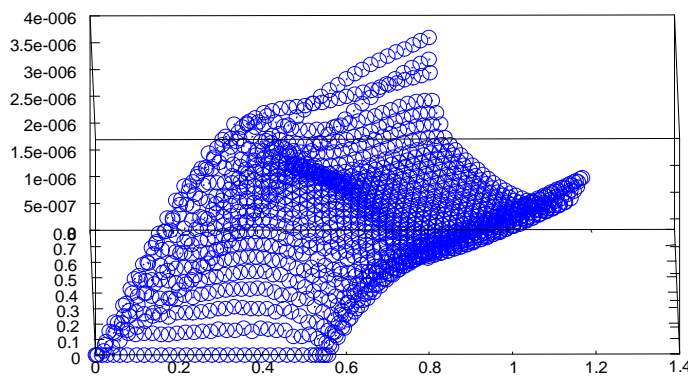


Σχήμα 5.10: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Από το **Σχήμα 5.10** φαίνεται ότι μετά τον 10ο αεροελαστικό κύκλο περίπου, έχει επέλθει πρακτικά η σύγκλιση, γιατί η τιμή του $||\mathbf{F}(i)-\mathbf{F}(i-1)||$ βρίσκεται κάτω από το όριο του 10^{-8} . Γενικά η σύγκλιση είναι γρήγορη και σχεδόν εκθετική.

Κατά τη διάρκεια του αεροελαστικού κύκλου όπως προαναφέρθηκε χρησιμοποιήθηκε το ίδιο επιφανειακό πλέγμα τόσο για την δομική ανάλυση όσο και για την αεροδυναμική και επομένως δεν έγινε κάποιου είδους παρεμβολή δυνάμεων ή μετατοπίσεων. Οι φορτίσεις που προέκυψαν από την ρευστομηχανική επίλυση μεταφέρθηκαν στους κόμβους του πλέγματος της δομικής ανάλυσης και μετά την επίλυση, οι μετατοπίσεις που προέκυψαν μεταφέρθηκαν στον κώδικα ρευστομηχανικής ανάλυσης για να γίνει η επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα με τη νέα γεωμετρία.

Παρατηρώντας το **Σχήμα 5.11** που παρουσιάζει την παραμορφωμένη πτέρυγα μετά την επίλυση με τον κώδικα μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι όντως η πτέρυγα ανυψώνεται και μάλιστα η μέγιστη ανύψωση συμβαίνει στο ακροπτερύγιο (όπως αναμένεται) ενώ την μεγαλύτερη παραμόρφωση λαμβάνει το τμήμα μετά το πρώτο 15-20% του μήκους της πτέρυγας προς τα δεξιά.



Σχήμα 5.11: Παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση χρήση ίδιου πλέγματος και στους 2 επιλύτες.

Παρ' όλα αυτά η μορφή της πτέρυγας μοιάζει υπερβολικά παραμορφωμένη σε ορισμένα σημεία, όπως στην μία πλευρά (αριστερά στο **Σχήμα 5.11**) και στο ακροπτερύγιο υπάρχει μια περιοχή (στην οποία εντοπίζεται η μέγιστη μετατόπιση) η οποία έχει αρκετά μεγαλύτερη παραμόρφωση από τις γειτονικές της περιοχές. Αυτό συμβαίνει διότι η επίλυση έγινε με χρήση του πλέγματος της ρευστομηχανικής ανάλυσης που απαιτεί πυκνότερο πλέγμα σε ορισμένα σημεία στα οποία δεν υπάρχει λόγος για πύκνωση από άποψη δομικής ανάλυσης γιατί δεν προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στη δομική ανάλυση. Επίσης, επειδή το πλέγμα στην αεροδυναμική ανάλυση είναι τριδιάστατο και εδώ χρησιμοποιείται το επιφανειακό πλέγμα πάνω στην πτέρυγα, στα άκρα της πτέρυγας υπάρχει μια ασυνήθιστη και απότομη πύκνωση λόγω της έντονης αλλαγής γεωμετρίας (καμπυλότητα γιατί η διατομή της αεροτομής είναι καμπύλη στα άκρα). Αυτός είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την ακρίβεια της δομικής ανάλυσης.

Κλείνοντας τη σύντομη περιγραφή αυτής της περίπτωσης, είναι καλό να τονιστεί ότι παρ' όλα τα μειονεκτήματα που επισημάνθηκαν, η πρώτη δοκιμή χρήσης των δύο κωδίκων για την αεροελαστική ανάλυση έδωσε ως ένα βαθμό αποδεκτά αποτελέσματα καθώς απέδωσε μια μορφή ανυψωμένης παραμορφωμένης πτέρυγας με μέγιστη μετατόπιση όχι πολύ μακριά από την αναμενόμενη και έδωσε την ευκαιρία να εντοπιστούν ορισμένοι βασικοί παράγοντες που μπορεί να παίζουν σημαντικό ρόλο στον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης.

5.3.1.2 Επίλυση με χρήση διαφορετικού επιφανειακού πλέγματος

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως, φάνηκε ότι γενικά δεν είναι καλό να χρησιμοποιηθεί ίδιο πλέγμα και για τα δύο είδη ανάλυσης. Έτσι, σ' αυτή την υποενότητα, θα γίνει προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν σε κάθε περίπτωση ακριβή και αποδοτικά πλέγματα για το κάθε είδος ανάλυσης και θα εξεταστούν **τρόποι** με τους οποίους θα μεταφερθούν οι πληροφορίες (δυνάμεις, μετατοπίσεις) μεταξύ των διαφορετικών πλεγμάτων έτσι ώστε να προσομοιωθεί κατά το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικά το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.

Θα εξεταστούν εννέα περιπτώσεις διαφορετικών πλεγμάτων. Σε όλες τις περιπτώσεις, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης θα είναι **ομοιόμορφο** (παράγεται από τον κώδικα του εργαστηρίου που έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 3 και έχει τη δυνατότητα να παράγει λαπλασιανό πλέγμα) και **αραιότερο** από το πλέγμα της αεροδυναμικής ανάλυσης. Ο σχολιασμός θα επικεντρωθεί τόσο στην σύγκλιση του αεροελαστικού κύκλου σε κάθε περίπτωση όσο και στην παραμορφωμένη μορφή της πτέρυγας που παράγεται σε κάθε περίπτωση και τις δυσκολίες που προέκυψαν κατά την «επικοινωνία» μεταξύ του κώδικα δομικής ανάλυσης και ρευστομηχανικής ανάλυσης.

Για διευκόλυνση, παρατίθεται ο **Πίνακας 5.3** που περιλαμβάνει τα βασικά στοιχεία των εννέα περιπτώσεων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια:

α/α	n_x^3	n_y^4	n_y/n_x	n_{cfd}/n_{csm}^5	κυκλ. συγκλ. ⁶	$\max w(\text{mm})^7$
1	4	17	4.25	15.9	8	$5 \cdot 10^{-4}$
2	4	10	2.50	26.1	9	$3 \cdot 10^{-4}$
3	4	12	3.00	22.1	7	$3 \cdot 10^{-4}$
4	8	16	2.00	9.4	12	$2 \cdot 10^{-4}$
5	8	22	2.75	6.9	11	$2.5 \cdot 10^{-4}$
6	8	28	3.50	5.5	9	$6 \cdot 10^{-4}$
7	10	20	2.00	6.2	11	$5 \cdot 10^{-4}$
8	10	28	2.80	4.5	14	$3.5 \cdot 10^{-4}$
9	10	35	3.50	3.6	16	$7 \cdot 10^{-4}$

Πίνακας 5.3: Βασικά στοιχεία των εννέα περιπτώσεων χρήσης διαφορετικού πλέγματος στους δύο επιλύτες που μελετώνται στην ενότητα 5.3.1.1.

Περίπτωση 1

³ n_x : αριθμός διαμερίσεων του πλέγματος κατά x

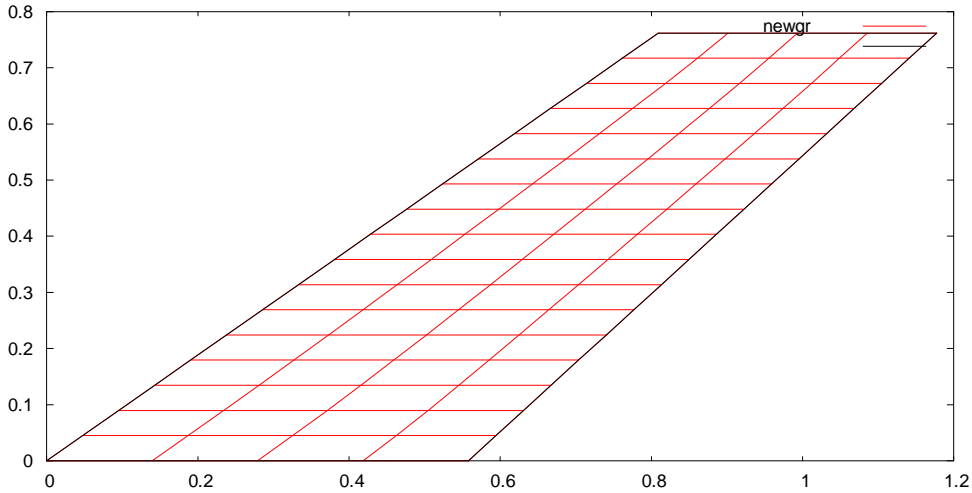
⁴ n_y : αριθμός διαμερίσεων του πλέγματος κατά y

⁵ λόγος συνολικού αριθμού κόμβων του πλέγματος που χρησιμοποιεί ο ρευστοδυναμικός επιλύτης προς τον συνολικό αριθμό κόμβων του πλέγματος που χρησιμοποιεί ο επιλύτης δομικής ανάλυσης

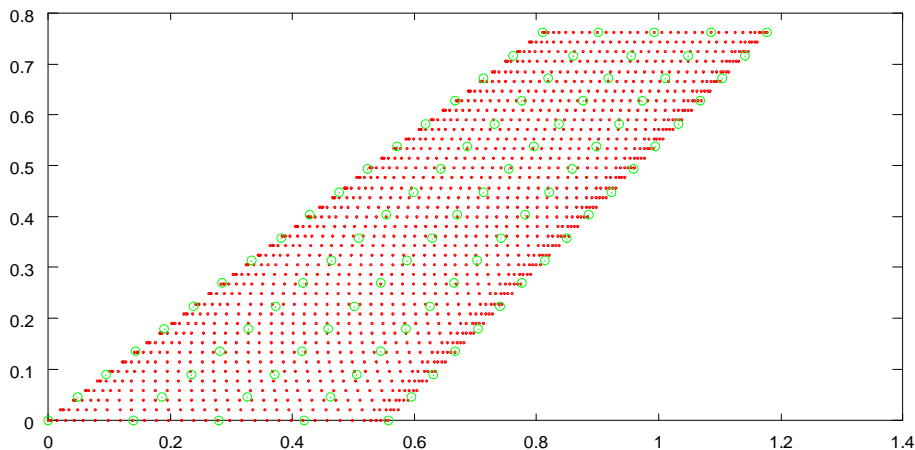
⁶ αριθμός αεροελαστικών κύκλων που απαιτούνται για τη σύγκλιση

⁷ μέγιστο βέλος κάμψης

Στην 1η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 4 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 17 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y. Στο **Σχήμα 5.12** και το **Σχήμα 5.13** απεικονίζεται το πλέγμα της δομικής ανάλυσης ξεχωριστά και μαζί (υπερτιθέμενο) με το πλέγμα της αεροδυναμικής ανάλυσης.



Σχήμα 5.12: Το πλέγμα της δομικής ανάλυσης της περίπτωσης 1.



Σχήμα 5.13: Υπέρθθεση των δύο πλεγμάτων στην περίπτωση 1- οι μικρές κόκκινες κουκκίδες είναι οι κόμβοι του πλέγματος του CFD κώδικα και οι πράσινοι κύκλοι είναι οι κόμβοι του πλέγματος δομικής ανάλυσης.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για τις δοκιμές περιγράφεται στη συνέχεια. Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί ότι μέσα σε ένα πεπερασμένο στοιχείο του πλέγματος της δομικής ανάλυσης (αραιό) βρίσκονται περισσότεροι του ενός κόμβοι του πλέγματος της αεροδυναμικής ανάλυσης. Επεκτείνοντας την έννοια της παρεμβολής μιας δύναμης στο εσωτερικό ενός μονοδιάστατου πεπερασμένου στοιχείου με διαμοιρασμό της στα 2 στους δύο κόμβους στα άκρα του πεπερασμένου στοιχείου, επιλέγεται να μοιραστεί η δύναμη που ασκείται σε κάθε κόμβο του πλέγματος της αεροδυναμικής ανάλυσης σε κάθε γειτονικό κόμβο του δομικού πλέγματος με στάθμιση ανάλογα με το κοινό εμβαδόν μεταξύ της κυψέλης που περιβάλλει τον αεροδυναμικό κόμβο και τα γειτονικά πεπερασμένα στοιχεία του δομικού πλέγματος. Εδώ θα μπορούσε εναλλακτικά να εφαρμοστεί κάποια

άλλη πιο παρεμβολή όπως να ελέγχεται η απόσταση του κόμβου αυτού από τους γειτονικούς του κόμβους του αραιού πλέγματος και να γίνεται μοίρασμα της δύναμης σ' αυτούς ανάλογα με την μεταξύ τους απόσταση, ή να γίνεται κάποια παρεμβολή σε όλα τα φορτία που ασκούνται στο πεπερασμένο στοιχείο, να εξάγεται κάποιο ισοδύναμο φορτίο και μετά αυτό να ισομοιράζεται στους κόμβους, κτλ. Στην παρούσα εργασία, όμως, θα εφαρμοστεί μόνο ο πρώτος τρόπος που αναφέρθηκε.

Μετά την επίλυση, θα προκύψουν οι τιμές των μετατοπίσεων, υπολογισμένες όμως στους κόμβους του αραιού πλέγματος. Παρόμοια με την παρεμβολή των δυνάμεων, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν διάφοροι τρόποι για την παρεμβολή των μετατοπίσεων στο πυκνό πλέγμα με διαφορετική ακρίβεια προσέγγισης ο καθένας. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί κάποια συνάρτηση παρεμβολής στις 2 διαστάσεις και ύστερα με βάση τη θέση κάθε κόμβου του πυκνού πλέγματος να προκύπτει η τιμή της μετατόπισης ή να λαμβάνουν οι κόμβοι του πυκνού πλέγματος που βρίσκονται μέσα σε ένα στοιχείο του αραιού να λαμβάνουν τιμή σχετική με τις τιμές μετατόπισης στους γύρω κόμβους ανάλογα με τη μεταξύ τους απόσταση, κτλ. Επιλέχθηκε να θεωρηθεί ότι όλοι οι κόμβοι του πυκνού πλέγματος που βρίσκονται μέσα σ' ένα στοιχείο να λαμβάνουν την ίδια μετατόπιση και ίση με τη μέση τιμή των μετατοπίσεων των γειτονικών κόμβων.

Αυτή η διαδικασία ακολουθείται και στις εννέα περιπτώσεις που θα εξεταστούν στην συνέχεια. Ας σημειωθεί ότι λήφθηκαν αποτελέσματα κοντά στις τιμές που υπολογίστηκαν με την χρήση ίδιου πλέγματος και στα δύο είδη αναλύσεων, πράγμα που σημαίνει ότι η παρεμβολή αυτή έδωσε αποτελέσματα μέσα σε αποδεκτά όρια, κάτι που θα επισημανθεί και στη συνέχεια.

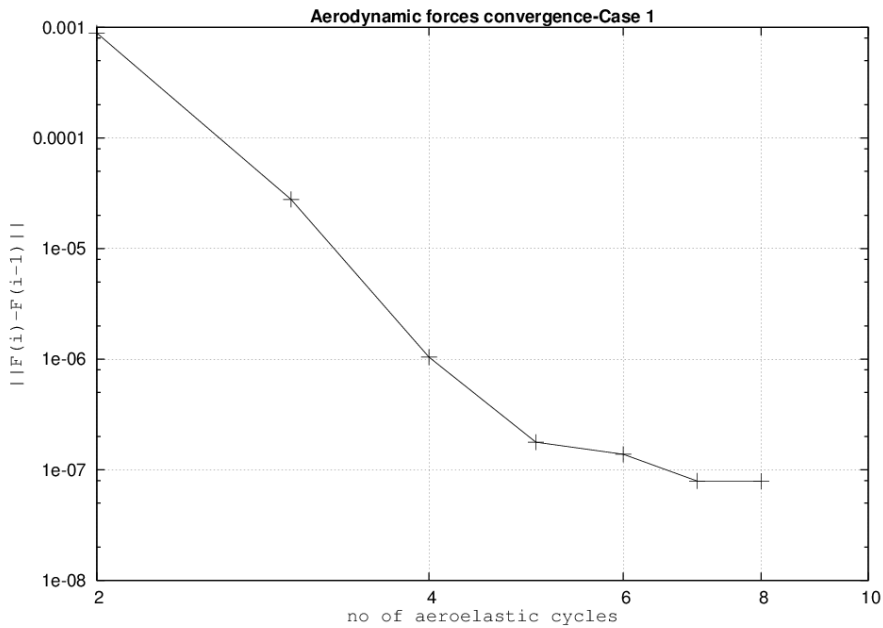
Ο Πίνακας 5.4 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 1η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	8.9162e-4
3	2.78496e-5
4	1.043e-6
5	1.7762e-7
6	1.38195e-7
7	7.909e-8
8	7.901e-8

Πίνακας 5.4: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 1.

Στη συνέχεια (Σχήμα 5.14) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων⁸:

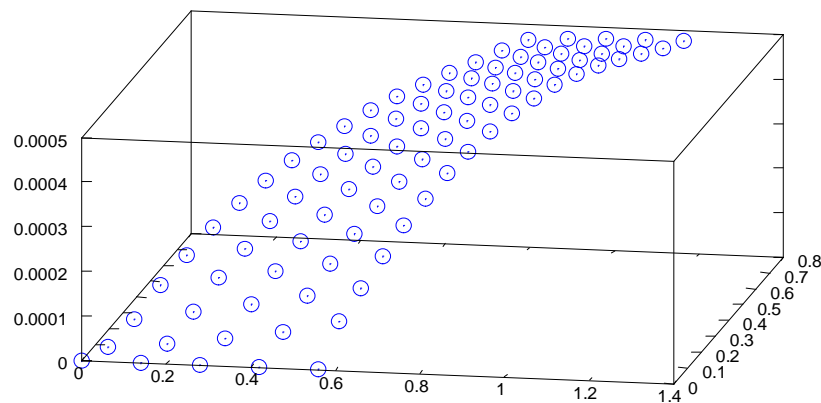
⁸ Το διάγραμμα σύγκλισης, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται παρουσιάζεται για λόγους ευκρίνειας σε διπλό λογαριθμικό διάγραμμα.



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται ότι επιτεύχθηκε πιο γρήγορη σύγκλιση απ' ότι στην προηγούμενη περίπτωση καθώς η τιμή του $||F(i)-F(i-1)||$ έγινε μικρότερη από 10^{-7} δύο κύκλους πιο νωρίς στην περίπτωση 1 απ' ότι στην προηγούμενη.

Παρατηρώντας το **Σχήμα 5.15** που δείχνει τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας φαίνεται αρχικά ότι η μορφή αυτή ικανοποιεί τις βασικές απαιτήσεις δηλαδή είναι ανυψωμένη, το αποτέλεσμα προσεγγίζει το αποτέλεσμα της προηγούμενης επίλυσης και η μέγιστη μετατόπιση είναι στο ακροπτερύγιο. Επιπλέον, όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, η πτέρυγα έχει μεγαλύτερη ανύψωση μετά τα πρώτα 15-20% του μήκους της προς το ακροπτερύγιο.



Σχήμα 5.15: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 1.

Στην περίπτωση 1 όμως, η μορφή της πτέρυγας μοιάζει εμφανώς πιο ρεαλιστική απ' ότι στην περίπτωση της υποενότητας 5.3.1.1 διότι έχουν εξαλειφθεί οι περιοχές με την απότομη αύξηση της παραμόρφωσης ή οι περιοχές με πιο παραμορφωμένη μορφή απ' ότι αναμενόταν. Αυτό θεωρείται λογικό διότι όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως, οι αποκλίσεις αυτές αποδίδονταν στη χρήση πλέγματος ακατάλληλου να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα κατά τη δομική ανάλυση. Έτσι τώρα η πτέρυγα έχει πιο «ομαλή» μορφή.

Από την άλλη, η χρήση ενός πολύ αραιού πλέγματος, παρότι μειώνει σημαντικά τον χρόνο επίλυσης, δίνει αποτελέσματα με μειωμένη ακρίβεια οπότε πρέπει να γίνεται κατάλληλη μελέτη πριν την επιλογή του κατάλληλου πλέγματος. Επίσης, εάν το πλέγμα είναι αρκετά αραιό σε σχέση με το πλέγμα της αεροδυναμικής ανάλυσης, έχει πολύ λιγότερη πληροφορία για να «περάσει» στο πυκνό πλέγμα με αποτέλεσμα να επηρεάζεται σημαντικά η ακρίβεια επίλυσης του γενικού προβλήματος από την μέθοδο παρεμβολής. Αντίθετα, εάν τα πλέγματα έχουν παρόμοια πυκνότητα, ακόμα και η χρήση μιας πιο απλής ή λιγότερο ακριβούς παρεμβολής δεν θα συνεπάγεται τη σημαντική μείωση της ακρίβειας στην επίλυση του προβλήματος.

Περίπτωση 2

Στην 2η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 4 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 10 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

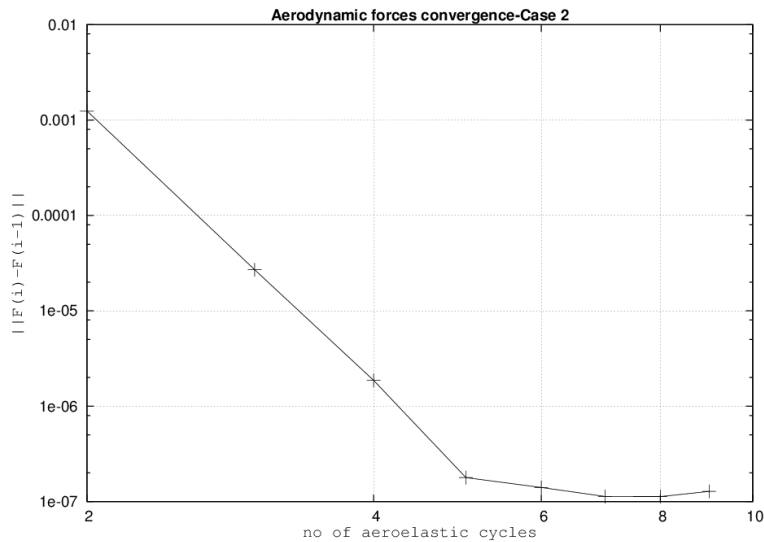
Ο Πίνακας 5.5 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 2η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.0012509
3	2.701e-5
4	1.861e-6
5	1.783e-7
6	1.4038e-7
7	1.1305e-7
8	1.128e-7
9	1.279e-7

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 2.

Στη συνέχεια (Σχήμα 5.16) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:

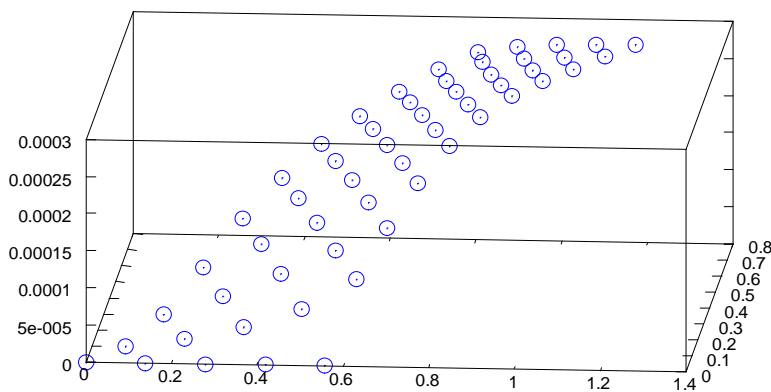
Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι όπως και στην 1η περίπτωση έχουμε σχετικά γρήγορη σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων.

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο **Σχήμα 5.17** γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης 1, αν και το πλέγμα είναι λίγο αραιότερο. Παρότι το πλέγμα είναι αραιότερο, διατηρείται όμως η ίδια μορφή με τα χαρακτηριστικά που έχουν προαναφερθεί.



Σχήμα 5.17: Η παραμορφωμένη πτέρυγα της περίπτωσης 2.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.17** είναι 0.0003 m, μικρότερη σε σχέση με την περίπτωση 1 λόγω του ότι είχε χρησιμοποιηθεί πλέγμα με διαφορετική διαμέριση (και λιγότερους κόμβους).

Γενικά, το αραιό αυτό πλέγμα (μόλις 40 πεπερασμένα στοιχεία ή το 1/36 του πλέγματος της αεροδυναμικής ανάλυσης) περιέχει λιγότερη πληροφορία απ' όλα τα άλλα που θα

εξεταστούν και γι' αυτό θεωρείται ότι δεν είναι το πλέον κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί σε μια ανάλυση διότι τα αποτελέσματα θα εξαρτηθούν σε μεγάλο βαθμό από την καταλληλότητα της παρεμβολής που θα γίνει στα μεγέθη που ανταλλάσσονται μεταξύ των δύο βασικών κωδίκων. Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι η επίλυση ήταν απαράδεκτη, κάτι που μπορεί να είναι χρήσιμο σε περίπτωση που είναι επιθυμητό να εξαχθούν κάποια πρώτα γρήγορα αποτελέσματα διότι ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος δομικής ανάλυσης με αυτό το πλέγμα είναι περίπου υποδεκαπλάσιος από αυτόν που χρειάστηκε στις περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκαν πολύ πυκνότερα πλέγματα και περίπου 60 φορές μικρότερος από την περίπτωση που χρησιμοποιήθηκε κοινό πλέγμα και στις δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 3

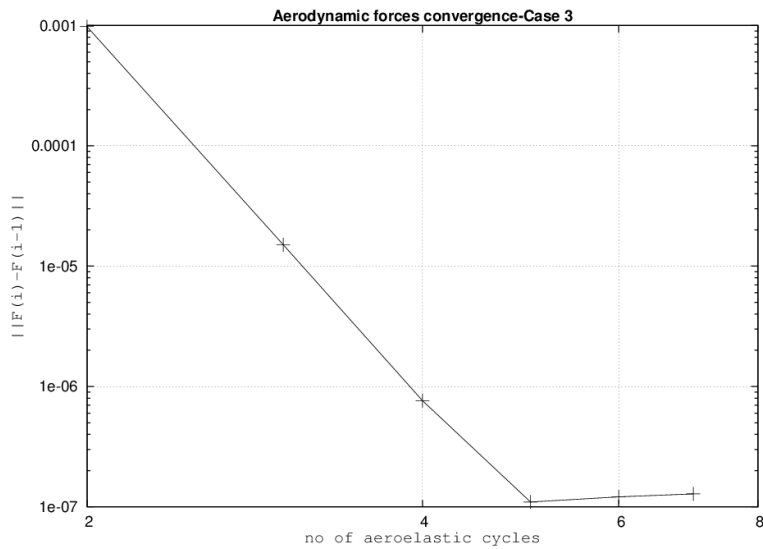
Στην 3η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 4 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 12 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

Ο Πίνακας 5.6 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 3η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ \mathbf{F}(i)-\mathbf{F}(i-1) $
1	-
2	9.79635e-4
3	1.5062e-5
4	7.628e-7
5	1.096e-7
6	1.2098e-7
7	1.281e-7

Πίνακας 5.6: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 3.

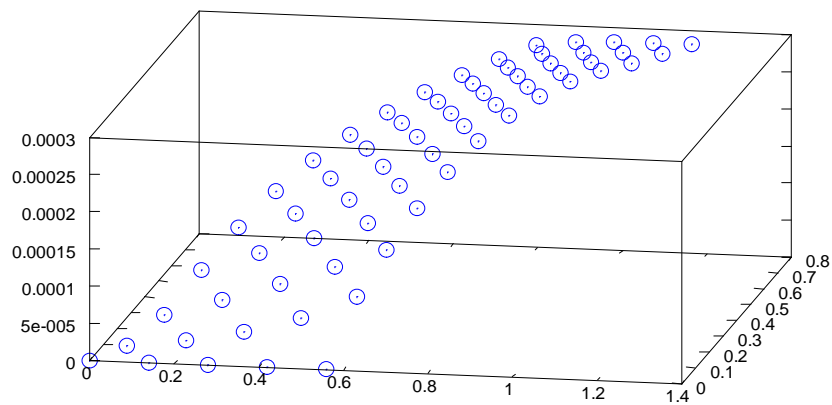
Στη συνέχεια (Σχήμα 5.18) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:



Σχήμα 5.18: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι όπως και στην 1η και την 2η περίπτωση έχουμε σχετικά γρήγορη σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων.

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο **Σχήμα 5.19** γίνεται αντιληπτό και πάλι ότι είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης 1. Όπως και στην περίπτωση 2, παρατηρείται μια ελαφριά «στροφή» του σχήματος προς το ακροπτερύγιο, που δεν ήταν τόσο εμφανής στην περίπτωση 1.

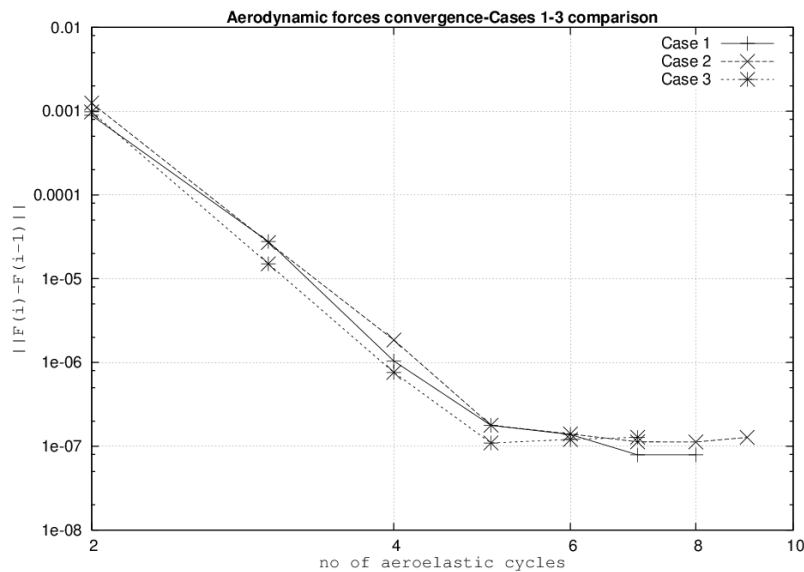


Σχήμα 5.19: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 3.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.19** είναι περίπου 0.0003m, παρόμοια με την περίπτωση 2 λόγω του ότι τα πλέγματα διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους.

Πριν παρουσιαστεί η επόμενη περίπτωση, που περιλαμβάνει πλέγμα με περισσότερες διαμερίσεις κατά τον άξονα x, θεωρήθηκε καλό να παρασταθούν γραφικά οι τρεις πρώτες

περιπτώσεις σε κοινό διάγραμμα σύγκλισης των δυνάμεων (Σχήμα 5.20) ώστε να μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Μάλιστα, επειδή οι διαφορές μεταξύ των τριών διαγραμμάτων είναι αρκετά μικρές έγινε μεγέθυνση σε μικρότερη περιοχή. Μέχρι τον πέμπτο κύκλο φαίνεται ότι συγκλίνει γρηγορότερα η τελευταία περίπτωση (4,12-η καμπύλη με τα αστεράκια *) ενώ στην συνέχεια συγκλίνει σε μικρότερη τιμή η καμπύλη της περίπτωσης 1(4,17-η καμπύλη με τους σταυρούς) και σε λίγο μεγαλύτερη τιμή η καμπύλη της περίπτωσης 2 (4,10-η καμπύλη με τα Χ). Αυτό σημαίνει ότι για πλέγματα παρόμοιων διαστάσεων δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στη σύγκλιση οι οποίες να σχετίζονται ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε, κάτι που θα φανεί στην συνέχεια κατά τη σύγκριση με περιπτώσεις όπου το πλέγμα είναι σημαντικά πυκνότερο.



Σχήμα 5.20: Συγκεντρωτικό διάγραμμα για σύγκρισης της σύγκλισης των περιπτώσεων 1-3.

Περίπτωση 4

Στην 4η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 8 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 16 διαμερίσεις κατά τον άξονα των γ.

Ο Πίνακας 5.7 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 4η περίπτωση:

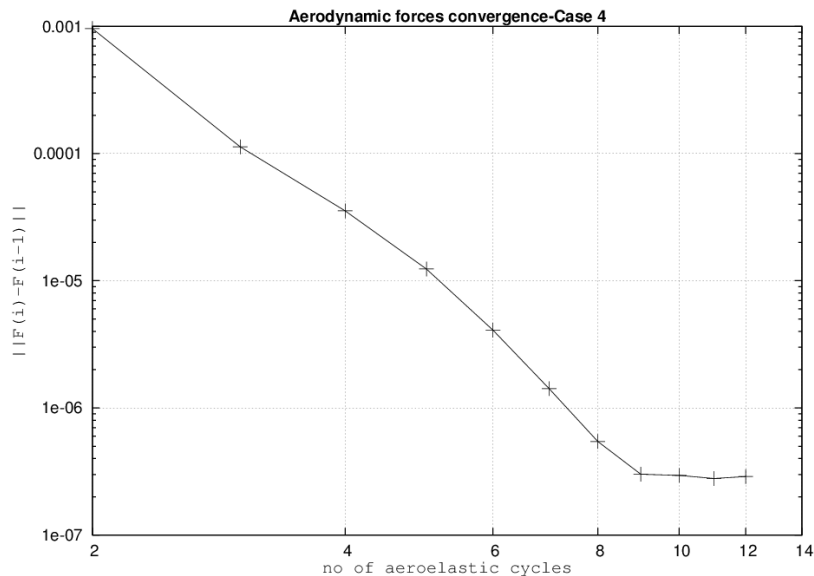
Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	9.629e-4
3	1.1302e-4
4	3.545e-5
5	1.2361e-5
6	4.0944e-6
7	1.4191e-6

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης

8	5.447e-7
9	3.0065e-7
10	2.946e-7
11	2.785e-7
12	2.884e-7

Πίνακας 5.7: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 4.

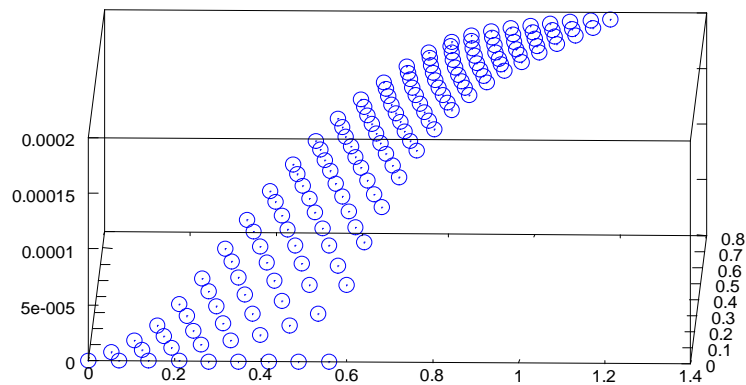
Στη συνέχεια (Σχήμα 5.21) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:



Σχήμα 5.21: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι πιο αργή από αυτήν που παρατηρήθηκε στις περιπτώσεις 1-3. Η σύγκλιση σε τιμή μικρότερη του 10^{-7} γίνεται σε τρεις κύκλους περισσότερους απ' ό τι γινόταν στις περιπτώσεις 1-3. Αυτό μπορεί να οφείλεται όπως είχε προαναφερθεί στο ότι τώρα υπολογίζονται περισσότερες διακριτές τιμές συνολικά στο πλέγμα άρα θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος για να συγκλίνουν.

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο Σχήμα 5.22 γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με αυτή των περιπτώσεων 1-3, αν και το πλέγμα είναι λίγο πυκνότερο. Η καμπύλη έχει μεγαλύτερη «στροφή» απ' ό τι αυτές των περιπτώσεων 1-3 που ήταν πιο «ομαλές» διότι τώρα έχει ληφθεί πληροφορία σε περισσότερα σημεία της πτέρυγας.



Σχήμα 5.22: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 4.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.22** είναι 0.0002 m, μικρότερη σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Μπορεί να σημειωθεί ότι στην περίπτωση 4 όπως και στις επόμενες, υπάρχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να προσεγγιστεί καλύτερα η μορφή της πτέρυγας γιατί υπολογίζονται τιμές σε περισσότερα σημεία, με κάποιο επιπρόσθετο κόστος λόγω της αύξησης του υπολογιστικού χρόνου και του αριθμού των κύκλων που απαιτούνται για τη σύγκλιση.

Περίπτωση 5

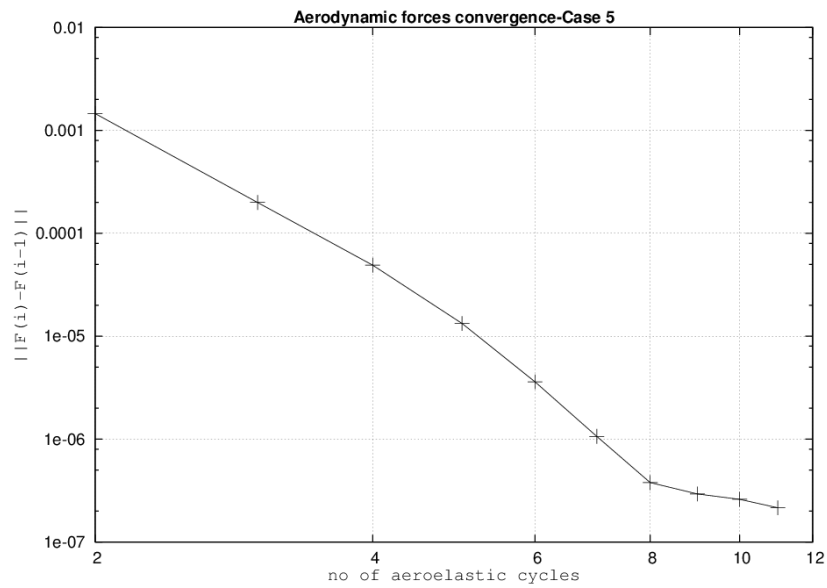
Στην 5η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 8 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 22 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

Ο **Πίνακας 5.8** περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 5η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.0014584
3	1.994e-4
4	4.8973e-5
5	1.331e-5
6	3.607e-6
7	1.06491e-6
8	3.7791e-7
9	2.936e-7
10	2.5986e-7
11	2.15196e-7

Πίνακας 5.8: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 5.

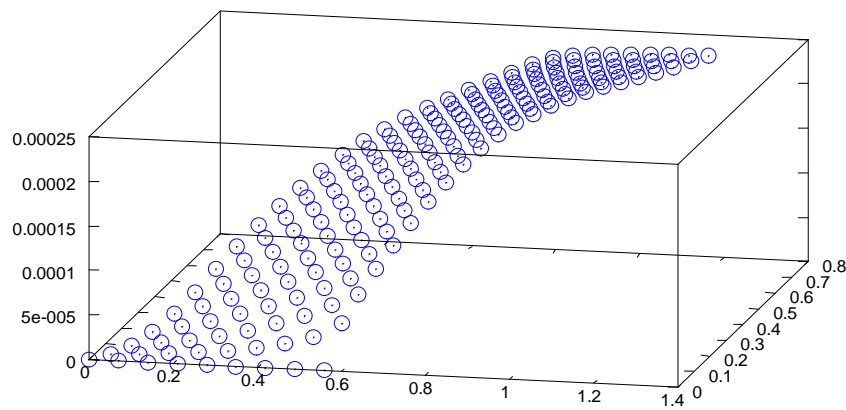
Στη συνέχεια (**Σχήμα 5.23**) παρουσιάζεται το διάγραμμα της σύγκλισης για τις τιμές των δυνάμεων:



Σχήμα 5.23: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι παρόμοια με αυτή που παρατηρήθηκε στην 4η περίπτωση.

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο **Σχήμα 5.24** γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με την μορφή που παρουσιάστηκε στην περίπτωση 4, και ίσως είναι λίγο πιο «ομαλή» προς το ακροπτερύγιο.



Σχήμα 5.24: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 5.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.24** είναι 0.00025, λίγο μεγαλύτερη σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

Περίπτωση 6

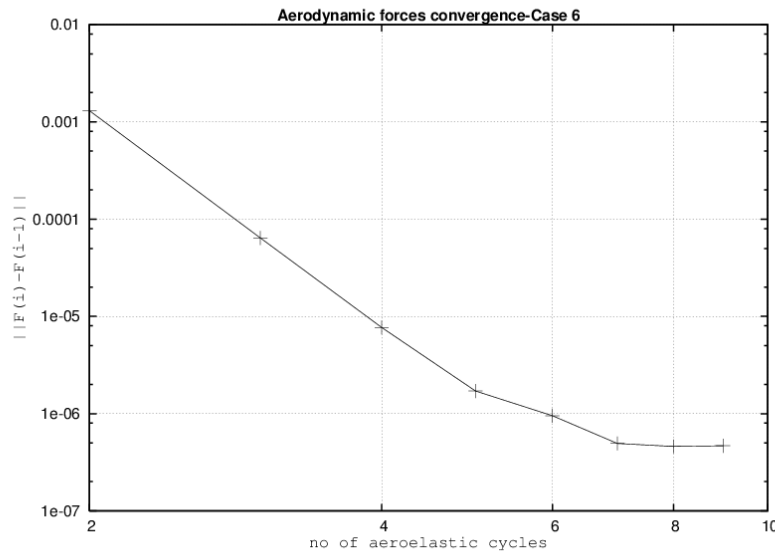
Στην 6η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 8 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 28 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

Ο Πίνακας 5.9 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 6η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.001301
3	6.40295e-5
4	7.70078e-6
5	1.70755e-6
6	9.537e-7
7	4.9356e-7
8	4.598e-7
9	4.678e-7

Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 6.

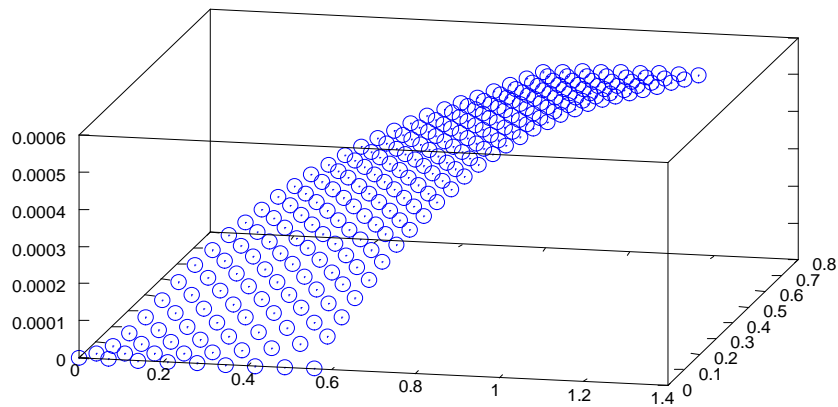
Στη συνέχεια (Σχήμα 5.25) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:



Σχήμα 5.25: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι παρόμοια με αυτή που παρατηρήθηκε στην 5^η περίπτωση.

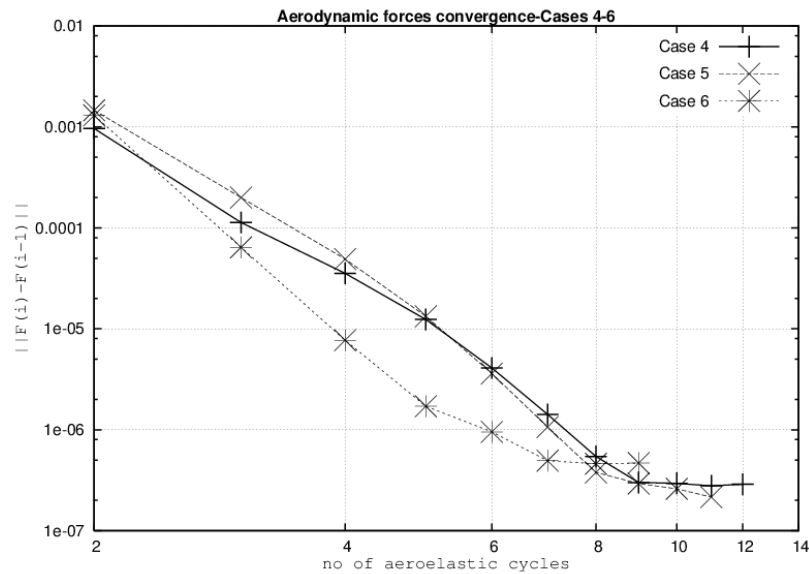
Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο Σχήμα 5.26 γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με τη μορφή στις περιπτώσεις 4-5.



Σχήμα 5.26: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 6.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.26 είναι 0.0006 m, μεγαλύτερη σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, πράγμα που μπορεί να σημαίνει ότι δεν είναι κατάλληλο να έχουμε τέτοιο λόγο διαμερίσεων κατά γ προς διαμερίσεις κατά χ.

Πριν παρουσιαστεί η επόμενη περίπτωση, που περιλαμβάνει πλέγμα με περισσότερες διαμερίσεις κατά τον άξονα χ, θεωρήθηκε καλό να παρασταθούν γραφικά οι περιπτώσεις 4-6 σε κοινό διάγραμμα σύγκλισης των δυνάμεων (Σχήμα 5.27).



Σχήμα 5.27: Σύγκριση της σύγκλισης στις περιπτώσεις 4-6.

Παρατηρείται ότι η περίπτωση 6 (γραμμή με αστεράκια) συγκλίνει πιο γρήγορα από τις άλλες δύο και στη συνέχεια συγκλίνει σε μικρότερη τιμή η περίπτωση 5(γραμμή με Χ) και η περίπτωση 4 (γραμμή με σταυρούς).

Περίπτωση 7

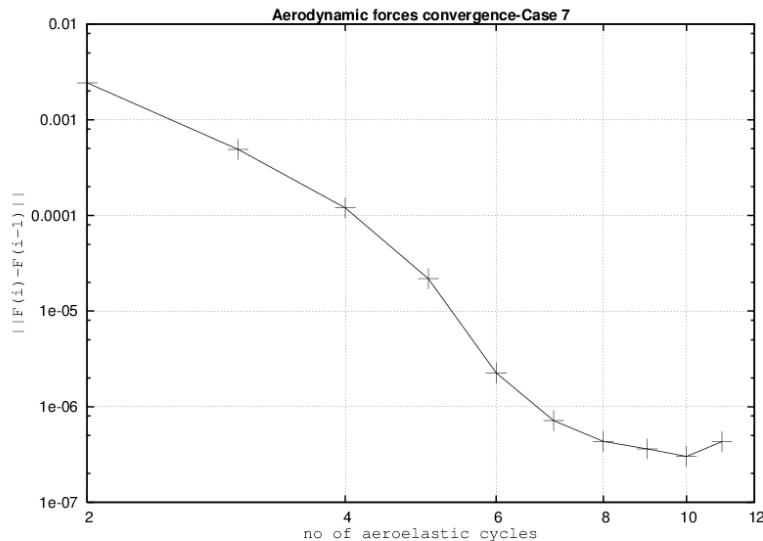
Στην 7η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 10 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 20 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

Ο Πίνακας 5.10 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 7η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.00243
3	0.00049
4	0.0001197
5	0.000021776
6	0.000002254
7	7.146e-7
8	4.337e-7
9	3.616e-7
10	3.023e-7
11	4.309e-7

Πίνακας 5.10: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 7.

Στη συνέχεια (Σχήμα 5.28) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:

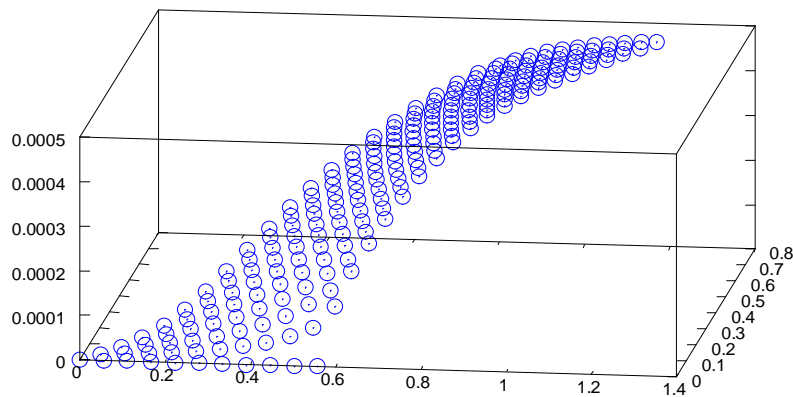


Σχήμα 5.28: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι αρκετά πιο αργή από αυτήν που παρατηρήθηκε στις περιπτώσεις 1-3 και λίγο πιο αργή από αυτήν που παρατηρήθηκε στις περιπτώσεις 4-6. Η σύγκλιση σε τιμή μικρότερη του 10^{-7} γίνεται σε 3-4 κύκλους περισσότερους απ' ό,τι γινόταν στις περιπτώσεις 1-3 και σε 1-2 κύκλους περισσότερους απ' ό,τι γινόταν στις περιπτώσεις 4-6. Αυτό μπορεί να

οφείλεται, όπως έχει προαναφερθεί, στο ότι τώρα υπολογίζονται περισσότερες διακριτές τιμές συνολικά στο πλέγμα άρα θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος για να συγκλίνουν.

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο **Σχήμα 5.29** γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με αυτή της περιπτώσεων 1-6, αν και το πλέγμα είναι λίγο πυκνότερο. Η διαφορά είναι ότι η πτέρυγα φαίνεται πιο «καμπύλη» προς το ακροπτερύγιο.



Σχήμα 5.29: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 7.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.29** είναι 0.0005 παρόμοια σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και γενικά μέσα στα όρια των προηγούμενων περιπτώσεων.

Περίπτωση 8

Στην 8η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 10 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 28 διαμερίσεις κατά τον άξονα των γ.

Ο **Πίνακας 5.11** περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 8η περίπτωση:

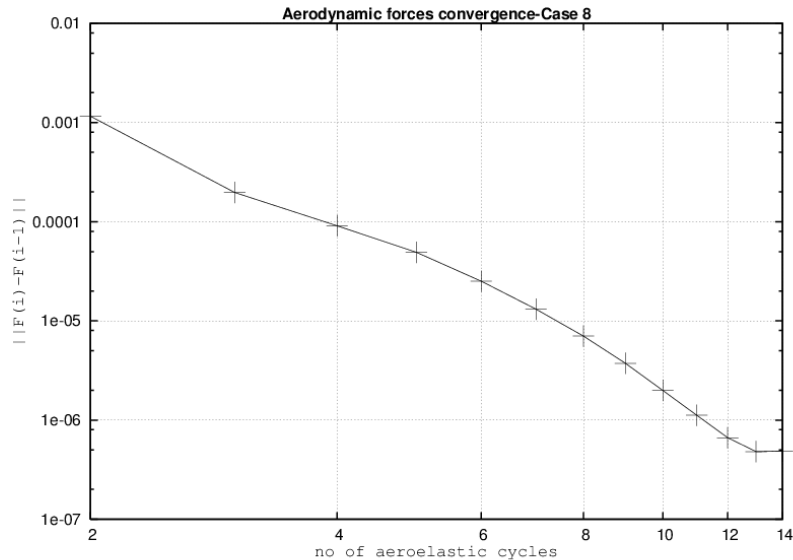
Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.001156
3	0.00019706
4	0.00009101
5	0.0000492
6	0.00002512
7	0.00001314
8	7.0275e-6
9	0.000003737
10	0.000001991
11	1.1189e-6
12	6.639e-7

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης

13	4.807e-7
14	4.879e-7

Πίνακας 5.11: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 8.

Στη συνέχεια (Σχήμα 5.30) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης των τιμών των δυνάμεων:

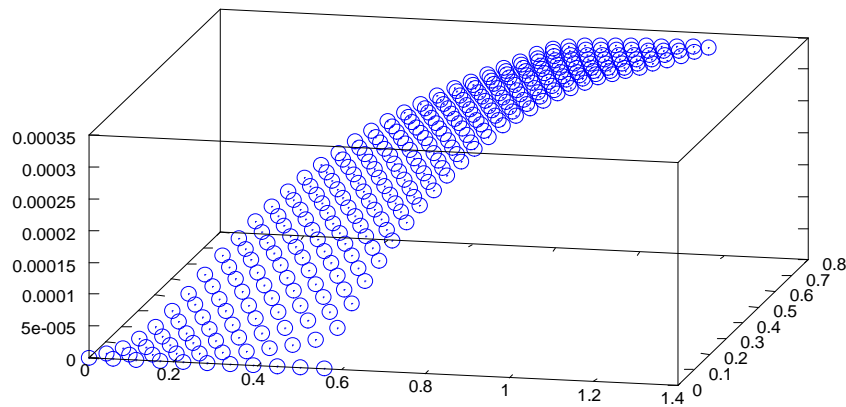


Σχήμα 5.30: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι λίγο πιο αργή και από την 7η περίπτωση, διότι παρατηρείται μια αργή “κάθοδος” για 3-4 κύκλους σε τιμές της τάξης του 10^{-5} και ύστερα προσεγγίζεται το όριο του 10^{-7} .

Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο Σχήμα 5.31 γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με αυτή των προηγούμενων περιπτώσεων, αν και φαίνεται λίγο πιο ομαλή προς το ακροπτερύγιο απ’ ότι στην περίπτωση 8.

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης



Σχήμα 5.31: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 8.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.31 είναι 0.00035, μικρότερη σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση αλλά γενικά κοντά στις τιμές που υπολογίστηκαν στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Περίπτωση 9

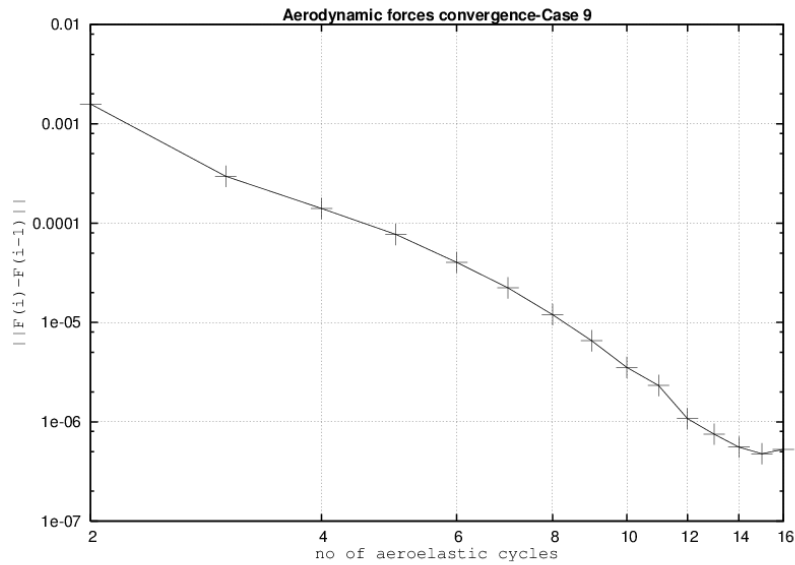
Στην 9η περίπτωση που θα εξεταστεί, το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχει 10 διαμερίσεις κατά τον άξονα x και 35 διαμερίσεις κατά τον άξονα των y.

Ο Πίνακας 5.12 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης για την 9η περίπτωση:

Αριθμός κύκλου	$ F(i)-F(i-1) $
1	-
2	0.001577
3	0.0002964
4	0.00014035
5	0.00007686
6	0.00004033
7	0.000022269
8	0.000011975
9	6.5527e-6
10	3.53228e-6
11	2.32e-6
12	1.0755e-6
13	7.51165e-7
14	5.558e-7
15	4.774e-7
16	5.2898e-7

Πίνακας 5.12: Αποτελέσματα επίλυσης για την περίπτωση 9.

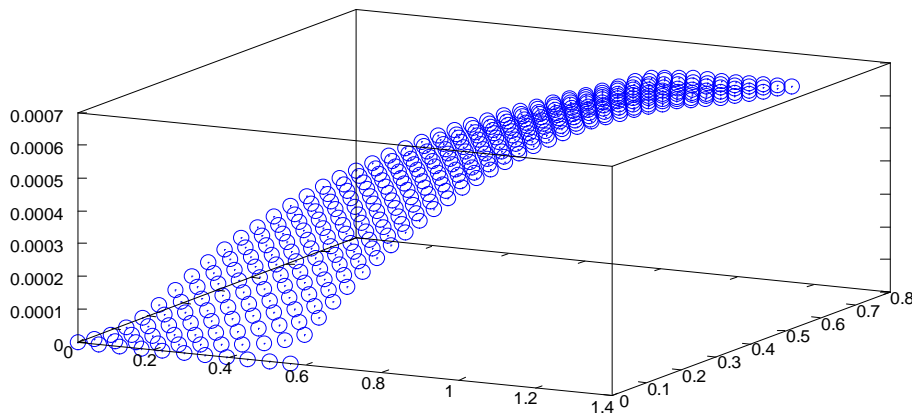
Στη συνέχεια (Σχήμα 5.32) παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκλισης για τις τιμές των δυνάμεων:



Σχήμα 5.32: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών δυνάμεων.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων είναι λίγο πιο αργή και από την 7η -8η περίπτωση, διότι παρατηρείται μια αργή “κάθοδος” για 3-4 κύκλους σε τιμές της τάξης 10^{-5} και ύστερα προσεγγίζεται το όριο του 10^{-7}

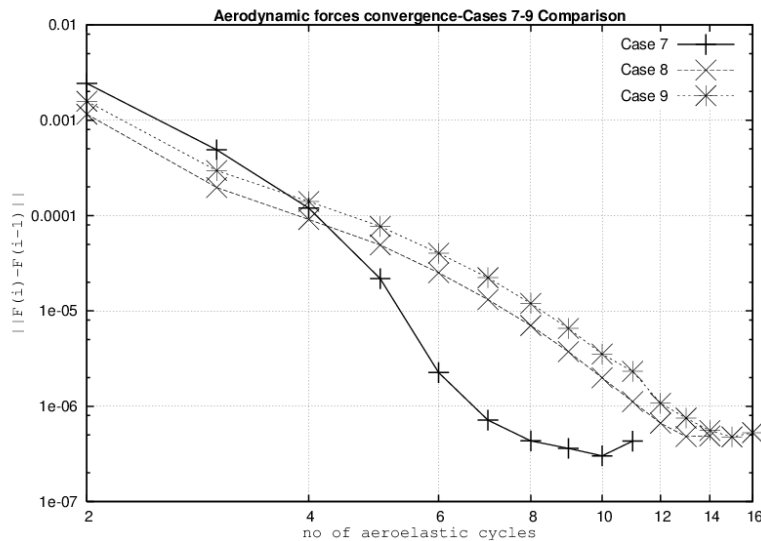
Παρατηρώντας τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας που εικονίζεται στο **Σχήμα 5.33** γίνεται αντιληπτό ότι είναι παρόμοια με την μορφή της περίπτωσης 8.



Σχήμα 5.33: Η παραμορφωμένη πτέρυγα στην περίπτωση 9.

Η μέγιστη μετατόπιση που υπολογίστηκε όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.33** είναι 0.0007 m, μεγαλύτερη σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και γενικά μεγαλύτερη από όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Επομένως και από αυτή την περίπτωση φαίνεται η ανάγκη επίλυσης με πλέγμα που θα έχει την πλέον κατάλληλη μορφή ώστε να λάβουμε αποδεκτά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια θα παρασταθούν γραφικά οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις σε κοινό διάγραμμα σύγκλισης των δυνάμεων (Σχήμα 5.34).



Σχήμα 5.34: Σύγκριση της σύγκλισης στις περιπτώσεις 7-9.

Φαίνεται ότι συγκλίνει πιο γρήγορα η περίπτωση 7 και ακολουθούν οι 8 και 9, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση η σύγκλιση σχετίστηκε και με την πυκνότητα του πλέγματος.

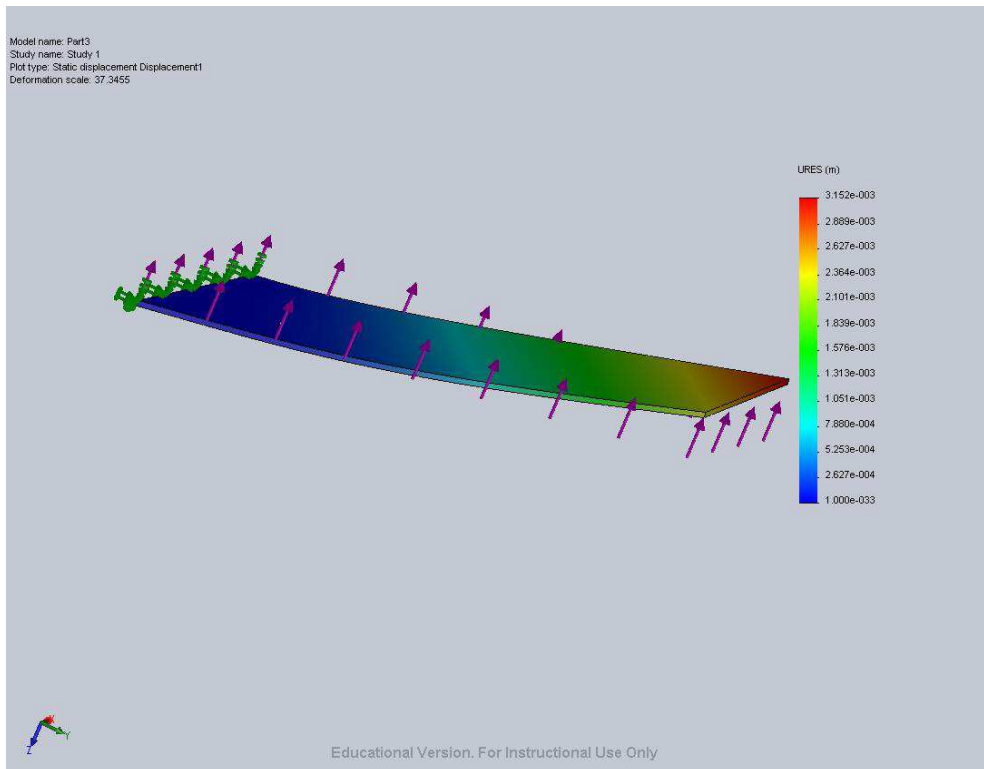
Από όλα όσα σχολιάστηκαν στις προηγούμενες εννέα περιπτώσεις φαίνεται ότι οι περιπτώσεις με αραιότερο πλέγμα συγκλίνουν πιο γρήγορα από τις υπόλοιπες. Μάλιστα πιο αργά συγκλίνει η περίπτωση με το πυκνότερο πλέγμα (περίπτωση 9). Η περίπτωση χρήσης ίδιου πλέγματος και στα δύο είδη ανάλυσης έχει σχετικά αργή σύγκλιση. Μπορεί να εξαχθεί λοιπόν το συμπέρασμα ότι όντως όσο το πλέγμα της δομικής ανάλυσης είναι πυκνότερο, απαιτούνται περισσότεροι αεροελαστικοί κύκλοι για τη σύγκλιση λόγω του ότι πρέπει να μεταβληθούν περισσότερες διακριτές τιμές από τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

5.3.1.3 Επίλυση με το λογισμικό Solidworks

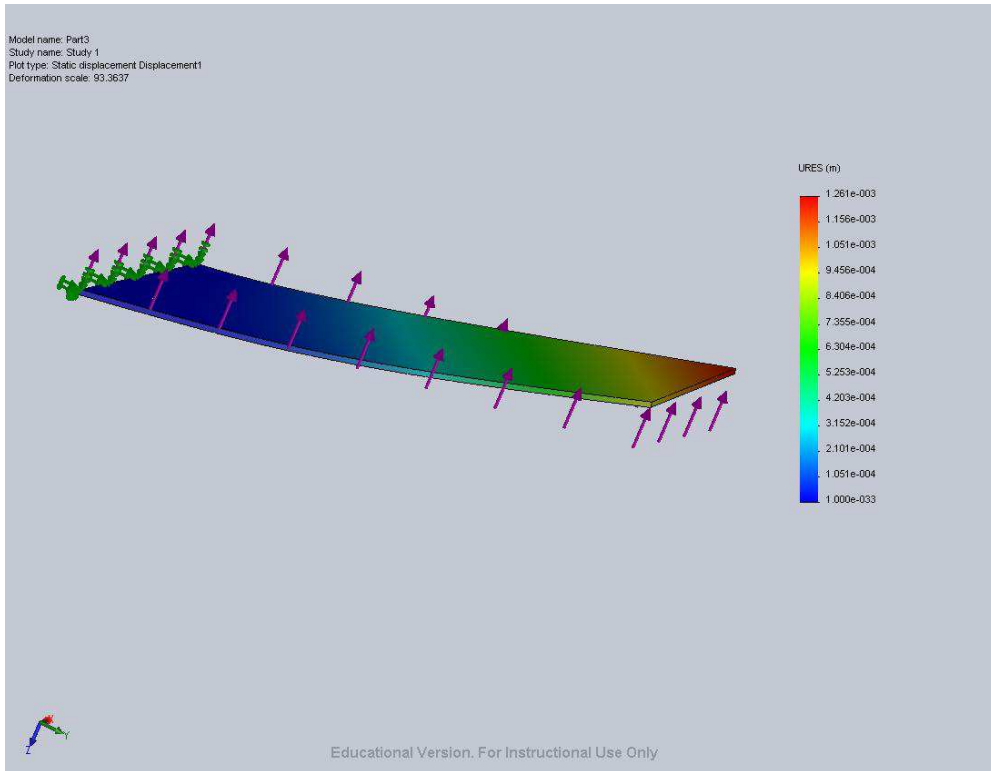
Προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβεια του κώδικα θα χρησιμοποιηθεί ξανά, όπως στο Κεφάλαιο 3, το εμπορικό λογισμικό Solidworks 2009 για να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα. Επειδή όμως δεν γίνεται να επιβληθεί ακριβώς η φόρτιση που επιβάλλεται στον αεροελαστικό κώδικα, θα επιβληθεί ομοιόμορφη φόρτιση ίση με το μέγιστο φορτίο που επιβάλλεται σε σημείο της πλάκας («περίπτωση 1») και ομοιόμορφη φόρτιση ίση με τον μέσο όρο του φορτίου που επιβάλλεται στην πλάκα («περίπτωση 2»). Έτσι, η πραγματική φόρτιση θα ισοδυναμεί με κάποια ενδιάμεση τιμή ομοιόμορφου φορτίου μεταξύ των δύο που επιβλήθηκαν και αν το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον αεροελαστικό κώδικα βρίσκεται ενδιάμεσα ή πολύ κοντά στα αποτελέσματα που προκύπτουν με το Solidworks σημαίνει ότι η επίλυση έγινε με ικανοποιητική ακρίβεια. Επίσης, έγινε και μια δοκιμή με επιβολή κάποιου ενδιάμεσου φορτίου μεταξύ αυτών που επιβλήθηκαν στις περιπτώσεις 1 και 3 ώστε να εξαχθούν περισσότερες πληροφορίες για τις τιμές των μετατοπίσεων που αναμένονται όταν ασκούνται τέτοιες φορτίσεις.

Κεφάλαιο 5-Κώδικας αεροελαστικής ανάλυσης

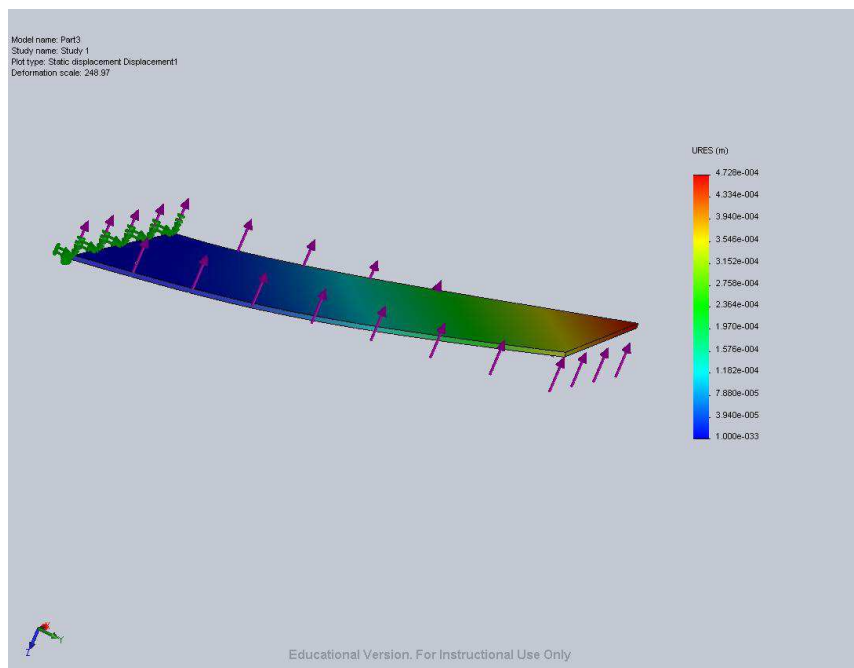
Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα της μετατόπισης για την περίπτωση επιβολής των τριών διαφορετικών ομοιόμορφων φορτίσεων στις δοκιμές με το λογισμικό Solidworks (Σχήμα 5.35, Σχήμα 5.36, Σχήμα 5.37):



Σχήμα 5.35: Περίπτωση επιβολής μέγιστου φορτίου («περίπτωση 1»).



Σχήμα 5.36: Περίπτωση εφαρμογής φορτίου με τιμή μεταξύ των τιμών φορτίου στις περιπτώσεις 1 και 2 («περίπτωση 3»).



Σχήμα 5.37: Επιβολή μέσου φορτίου («περίπτωση 2»).

5.3.2 Επίλυση με κώδικα δομικής ανάλυσης στοιχείου δοκού

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί και θα σχολιαστεί μια περίπτωση επίλυσης με τον κώδικα δομικής ανάλυσης στοιχείου δοκού που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3, δηλαδή μοντελοποιώντας την πτέρυγα από άποψη δομικής ανάλυσης με ένα άλλο είδος πεπερασμένου στοιχείου.

Στην περίπτωση χρήσης πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού (beam) θα ληφθεί πλέγμα (1Δ) με όσες διαμερίσεις έχει και το πλέγμα της αεροδυναμικής ανάλυσης κατά τον άξονα γ (δηλαδή περίπου όπως την περίπτωση χρήσης του ίδιου επιφανειακού πλέγματος κατά τα δύο είδη αναλύσεων που εξετάστηκε στην προηγούμενη ενότητα με τα πεπερασμένα στοιχεία τύπου πλάκας). Σε μελλοντική εργασία καλό θα ήταν να γίνουν δοκιμές με πυκνότερο πλέγμα κατά τον άξονα γ (διαμήκης άξονας της πτέρυγας), ώστε ο κώδικας να είναι σε θέση να αντιμετωπίζει πιο γενικές περιπτώσεις.

5.3.2.1 Επίλυση με χρήση πλέγματος παρόμοιας πυκνότητας (κατά μια διεύθυνση)

Στην περίπτωση χρήσης πλέγματος παρόμοιας πυκνότητας κατά τη διεύθυνση γ θα ακολουθηθεί η διαδικασία που θα περιγραφεί στη συνέχεια. Το μόνο που θα αλλάξει είναι ο κώδικας δομικής ανάλυσης και ο υπόλοιπος κώδικας αεροδυναμικής ανάλυσης θα διατηρήσει την ίδια δομή.

Όσον αφορά την είσοδο στον κώδικα δομικής ανάλυσης, που είναι οι αεροδυναμικές φορτίσεις, θα θεωρηθεί ότι όλες οι δυνάμεις που ασκούνται σε κόμβους με ίδιο γ με αντίστοιχο κόμβο της δοκού ασκούνται σ' αυτόν τον κόμβο της δοκού. Θα μπορούσε επίσης να δοκιμαστεί κάποια στάθμιση με βάση την απόσταση από τον κάθε κόμβο και «μοίρασμα» στους 2 γειτονικούς κόμβους του πεπερασμένου στοιχείου.

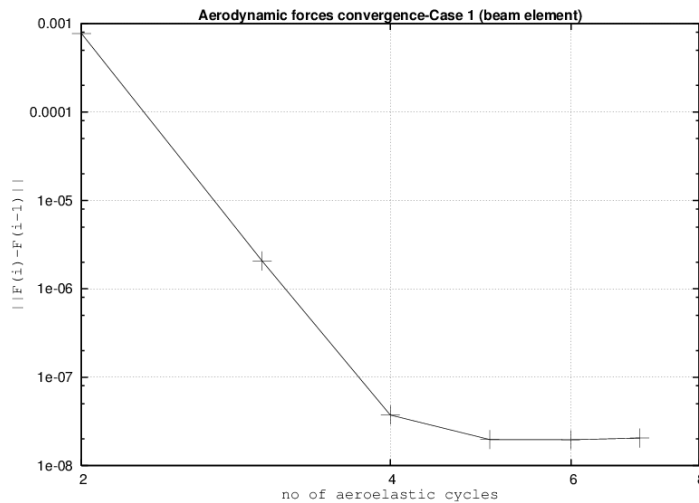
Στη συνέχεια, γίνεται κανονικά η ανάλυση και λαμβάνεται το διάνυσμα των μετατοπίσεων. Όσον αφορά τις μετατοπίσεις, επειδή δεν υπάρχει πληροφορία για την κατανομή τους κατά x αφού το μοντέλο είναι 1Δ, θα θεωρηθεί ότι κόμβοι με το ίδιο γ θα λάβουν την ίδια μετατόπιση με τον αντίστοιχο κόμβο της δοκού με το ίδιο γ. Στη συνέχεια θα δημιουργηθεί κατάλληλο αρχείο με την παραμορφωμένη γεωμετρία για είσοδο στον κώδικα aero3D και θα συνεχιστεί ο αεροελαστικός κύκλος όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενη υποενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

Μετά την επίλυση του προβλήματος με τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης λήφθηκαν τα εξής αποτελέσματα για τη σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων (Πίνακας 5.13):

Αριθμός κύκλου	$ \mathbf{F}(i)-\mathbf{F}(i-1) $
1	-
2	7.7436e-4
3	2.0598e-6
4	3.7327e-8
5	1.96938e-8
6	1.96e-8
7	2,07e-8

Πίνακας 5.13: Σύγκλιση στην περίπτωση χρήσης πεπερασμένων στοιχείων δοκού.

Στο Σχήμα 5.38 παρουσιάζεται η σύγκλιση των τιμών των δυνάμεων:



Σχήμα 5.38: Σύγκλιση στην περίπτωση χρήσης πεπερασμένων στοιχείων δοκού.

Παρατηρείται ότι η σύγκλιση ήταν ταχύτερη, πολύ πιο γρήγορη απ' ό,τι στην περίπτωση των στοιχείων πλάκας και όσον αφορά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση (γιατί όσον αφορά τον υπολογιστικό χρόνο είναι προφανές ότι είναι ταχύτερη η επίλυση). Αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί (όπως προαναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα) και πάλι από το γεγονός ότι υπάρχει μικρός αριθμός διακριτών τιμών που υπολογίζονται (μετατόπιση στους κόμβους) άρα, όπως και στην περίπτωση που εξετάστηκαν αραιά 2Δ πλέγματα, είναι πιο γρήγορη η σύγκλιση.

Όσον αφορά τη μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας, αυτή είναι ανυψωμένη κατά τον άξονα z όπως αναμένεται, και η τιμή της μέγιστης μετατόπισης προσεγγίζει την τιμή που υπολογίστηκε με πεπερασμένα στοιχεία τύπου πλάκας. Στην περίπτωση αυτή, που χρησιμοποιείται στοιχείο δοκού η πιστοποίηση του επιλύτη μπορεί να γίνει με την δοκιμή αντίστοιχων φορτίων όπως έγινε και με τη χρήση του Solidworks στην υποενότητα 5.3.1.3, στην αναλυτική σχέση της Μηχανικής για την πακτωμένη δοκό με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο: $w_{max} = \frac{qL^4}{8EI}$, όπου q το κατανεμημένο φορτίο (σε N/m).

Επομένως είναι δυνατόν, ακόμα και στην περίπτωση χρήσης στοιχείων δοκού, να ληφθούν κάποια γενικά αποδεκτά αποτελέσματα αν π.χ. για λόγους ταχύτητας επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί αυτό το μοντέλο για κάποιες αρχικές διερευνήσεις. Να σημειωθεί ότι αφού αυτό το μοντέλο δεν μπορεί να δώσει την κατανομή των μετατοπίσεων κατά x ώστε να ληφθεί μια πιο αντιπροσωπευτική παραμορφωμένη μορφή της πτέρυγας, δεν είναι καλό να χρησιμοποιηθεί αυτό το πεπερασμένο στοιχείο. Από την άλλη, ένα μεγάλο πλεονέκτημα είναι η σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου, ο οποίος ήταν περίπου ο μισός σε σχέση με τον πιο γρήγορο αεροελαστικό κύκλο της υποενότητας 5.3.1.2 ενώ ο χρόνος επίλυσης με τον κώδικα δομικής ανάλυσης ήταν περίπου το 1/20 του χρόνου που απαιτήθηκε για την επίλυση με το αραιότερο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε στην υποενότητα 5.3.1.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Βελτιστοποίηση κατασκευών με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου

6.1 Εισαγωγή

6.1.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της απότομης καθόδου (αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης) και με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Θα χρησιμοποιηθεί ένας κώδικας πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού (beam element) για τη δομική ανάλυση μιας δοκού στην οποία θα εξεταστούν διάφορες περιπτώσεις βελτιστοποίησής της με μεταβλητές σχεδιασμού σχετικές τόσο με την αντοχή της (μέτρο ελαστικότητας) όσο και με την γεωμετρία της (μήκος, πλάτος κτλ.).

Αρχικά, θα γίνει μια σύντομη αναφορά στη συζυγή μέθοδο για υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Να σημειωθεί ότι άλλες μέθοδοι υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας είναι ο υπολογισμός με πεπερασμένες διαφορές, με λογισμικό αυτόματης διαφόρισης, με χρήση μιγαδικών συναρτήσεων, κτλ. (Γιαννάκογλου, 2006).

Τέλος, αξίζει να επισημανθεί, ότι ανάμεσα στις πρώτες (παγκοσμίως) ερευνητικές ομάδες που ασχολήθηκαν με τη μελέτη και την ανάπτυξη κωδίκων βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής και της συνεχούς συζυγής μεθόδου ήταν η ερευνητική ομάδα της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής και Βελτιστοποίησης. Ενδεικτικές δημοσιεύσεις που καλύπτουν διάφορα θέματα σχετικά με τις συζυγή μέθοδο, είναι : (Papadimitriou & Giannakoglou, 2007), (Papadimitriou & Giannakoglou, 2007 (2)), (Zymaris, Papadimitriou, & Giannakoglou, 2007), (Papadimitriou & Giannakoglou 2007 (3)), (Papadimitriou & Giannakoglou, 2008), (Papadimitriou & Giannakoglou 2008 (2)).

6.1.2 Η διακριτή συζυγής μέθοδος

Σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης υπάρχει ένας ή περισσότεροι στόχοι που θέτουμε, οι οποίοι εκφράζονται με κάποιο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό λαμβάνει τη μορφή μιας συνάρτησης στόχου F η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί και διατυπώνεται γενικά στη μορφή (Γιαννάκογλου, 2006):

$$F = F(\vec{U}, \vec{b}) \text{ ή } F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b}) \quad (6.1)$$

όπου \vec{U} : το διάνυσμα των μεταβλητών ροής (μεταβλητών κατάστασης), \vec{b} : διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

Κάθε μεταβολή $\delta \vec{b}$ που αντιστοιχεί σε μικρή αλλαγή των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος, προκαλεί μεταβολή δF της τιμής της συνάρτησης στόχου ίση με:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \quad (6.2)$$

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης ισοδυναμεί με εύρεση εκείνου του διανύσματος \vec{b} για το οποίο $\delta F = 0$, τη γνωστή αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ακρότατου.

Οι εξισώσεις που διέπουν το πεδίο (εξισώσεις κατάστασης) γράφονται με τη συμβολική χρήση του τελεστή R στη μορφή (Γιαννάκογλου, 2006):

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{b}) = 0 \quad (6.3)$$

Κάθε μεταβολή $\delta \vec{b}$ μεταβάλλει το πεδίο, αλλά αφού συνεχίζουν να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής που το εκφράζουν ισχύει ότι

$$\delta \vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \quad (6.4)$$

Στη συνέχεια, το διάνυσμα $\delta \vec{R}$ πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα $\vec{\Psi}^T$ (το λεγόμενο διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών) και η ποσότητα που προκύπτει αφαιρείται από τη μεταβολή της συνάρτησης στόχου. Έτσι, δημιουργείται η επαυξημένη συνάρτηση στόχος, της οποίας η μεταβολή είναι (Γιαννάκογλου, 2006) (Bisplinghoff & Ashley, 1975) :

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} - \vec{\Psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} \right) \quad (6.5)$$

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \delta \vec{b} \quad (6.6)$$

Στη συζυγή μέθοδο, επιλέγεται κατάλληλα το διάνυσμα $\vec{\Psi}$ ώστε να μηδενιστεί ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος ,δηλαδή:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (6.7)$$

Το πεδίο των συζυγών μεταβλητών $\vec{\Psi}$ προκύπτει από τη λύση της συζυγούς εξίσωσης :

$$\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \vec{\Psi}^T = \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]^T \quad (6.8)$$

Οπότε, τελικά, η σχέση της επαυξημένης συνάρτησης στόχου γίνεται:

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (6.9)$$

Η παραπάνω διαδικασία διατύπωσης του προβλήματος, που βασίστηκε στον ορισμό της επαυξημένης συνάρτησης – στόχου και σε μαθηματικές πράξεις και εξισώσεις ώστε η μεταβολή της να είναι ανεξάρτητη κάθε μεταβολής μεγέθους του πεδίου και να συναρτάται

μόνο μεταβολών των μεταβλητών σχεδιασμού, προσδιορίζει τη λεγόμενη **διακριτή συζυγή μέθοδο** (discrete adjoint method), η οποία και θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η **συνεχής συζυγής μέθοδος**, η οποία βασίζεται και αυτή στην επαυξημένη συνάρτηση στόχο με τη διαφορά όμως ότι αυτή συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης στόχου **πριν** τη διακριτοποίησή της και από το ολοκλήρωμα των εξισώσεων κατάστασης (ροής) πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών.

6.1.3 Περιγραφή των εξισώσεων του κεφαλαίου

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην προηγούμενη υποενότητα, θα καταγραφούν συνοπτικά οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της βελτιστοποίησης για τις περιπτώσεις **δομικής βελτιστοποίησης** οι οποίες παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο.

- *Μεταβλητή σχεδιασμού* μπορεί να είναι μία (αλλά και συνδυασμός περισσοτέρων) από τις ποσότητες: E (μέτρο ελαστικότητας Young), h (πάχος δοκού), b (πλάτος δοκού), L (μήκος δοκού) και I (ροπή αδράνειας δοκού που προκύπτει από ορισμένες από τις προαναφερθείσες ποσότητες).
- Το διάνυσμα των *μεταβλητών κατάστασης* περιλαμβάνει το βέλος κάμψης και τη γωνία στροφής σε κάθε κόμβο της δοκού.
- Η *συνάρτηση στόχος* μπορεί να περιλάβει κάποια από τις προαναφερθείσες ποσότητες ή και συνδυασμό τους.
- Οι *εξισώσεις κατάστασης* είναι το γνωστό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα $[K][U]=[f]$ (από το κεφάλαιο 2) και γράφονται στη μορφή $[R] = [K][U]-[f]$. Επειδή οι μεταβλητές σχεδιασμού για σταθερό dx και διατομή της δοκού είναι ένας σταθερός παράγοντας για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, μπορεί να βρίσκονται εκτός του πίνακα k (δυσκαμψίας). Τότε, αν ονομαστεί αυτός ο σταθερός παράγοντας $\frac{EI}{dx^3} = \kappa$, ο πίνακας k θα γραφεί κΑ όπου Α ο πίνακας k διαιρεμένος με τον παράγοντα κ.

- Το διάνυσμα $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$ είναι το
$$\begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \vdots \\ 2 [U_N] \\ [0] \end{bmatrix}$$
 (στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται στην συνάρτηση στόχο όροι όπως w_{\max}^2 ή $(w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$, κάτι που συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις σ' αυτό το κεφάλαιο).

Η *συζυγής εξίσωση* θα γραφεί ως $\kappa A^T \vec{\Psi} = \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}\right]^T$

- Η ζητούμενη παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta b}$ θα προκύψει από τη σχέση $\frac{\delta F}{\delta b} = \frac{\partial F}{\partial b} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial b}$

όπου $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$ όταν στην συνάρτηση στόχο δεν περιλαμβάνεται κάποια μεταβλητή σχεδιασμού και $\frac{\partial \vec{R}}{\partial b} = \frac{\partial \kappa}{\partial b} A \vec{U}$.

6.1.4 Περιγραφή του κώδικα δομικής ανάλυσης

Ο κώδικας δομικής ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, θα χρησιμοποιηθεί και σε αυτό το κεφάλαιο. Για τις ανάγκες αυτού του κεφαλαίου ξαναγράφηκε, σε γλώσσα FORTRAN. Αξίζει να αναφερθούν συνοπτικά ορισμένα από τα χαρακτηριστικά του κώδικα, ορισμένα εκ των οποίων δεν είχαν χρησιμοποιηθεί για τον κώδικα των προηγούμενων κεφαλαίων.

Αρχικά το πρόγραμμα διαβάζει από αρχείο τα απαραίτητα δεδομένα και τις επιθυμητές παραμέτρους επίλυσης (π.χ. πόσα πεπερασμένα στοιχεία να χρησιμοποιηθούν).

Στη συνέχεια αρχικοποιούνται οι πίνακες, υπολογίζονται ορισμένα απαραίτητα μεγέθη (π.χ. ροπή αδράνειας) και γίνεται ο υπολογισμός του τοπικού μητρώου δυσκαμψίας k , που όπως έχει προαναφερθεί είναι το :

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

το οποίο είναι ίδιο για κάθε πεπερασμένο στοιχείο (για σταθερό $l=dx$ και ροπή αδράνειας I), άρα ο υπολογισμός του (με κλήση κατάλληλης υπορουτίνας) θα γίνει μόνο μία φορά.

Έπειτα, καλείται η υπορουτίνα που δημιουργεί το ολικό μητρώο δυσκαμψίας στο οποίο εισάγονται σε κατάλληλα σημεία τα τοπικά μητρώα δυσκαμψίας κάθε στοιχείου. Ο πίνακας αυτός έχει διαμορφωθεί σε πίνακα block τριδιαγώνιο (με διάσταση block 2×2) για εξοικονόμηση μνήμης υπολογιστή. Επόμενο βήμα είναι ο ορισμός του διανύσματος φόρτισης $[f]$ ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζεται και ύστερα γίνεται η επιβολή των οριακών συνθηκών στη δοκό (συνθήκες Dirichlet) η οποία γίνεται με κατάλληλη υπορουτίνα και ουσιαστικά τροποποιεί το μητρώο $[K]$ στα σημεία που αντιστοιχούν στους περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας.

Τέλος, επιλύεται το σύστημα $[K] [u] = [f]$ και προκύπτει το διάνυσμα των αγνώστων u σε κάθε σημείο. Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται άμεση μέθοδος (όχι επαναληπτική) επίλυσης τριδιαγώνιου block μητρώου που χρησιμοποιεί την παραγοντοποίηση LU. Τα αποτελέσματα της επίλυσης γράφονται σε αρχείο.

Στον ίδιο κώδικα, έχει υλοποιηθεί και η διαδικασία της βελτιστοποίησης με έναν εξωτερικό βρόχο. Στο αρχείο με τα δεδομένα εισόδου υπάρχει και η δυνατότητα ορισμού του n και του μέγιστου αριθμού κύκλων βελτιστοποίησης που θα γίνουν. Στο τέλος γράφονται τα αποτελέσματα της διαδικασίας της βελτιστοποίησης (π.χ. παράγωγοι ευαισθησίας, τιμές συνάρτησης- στόχου σε κάθε κύκλο) σε αρχείο.

6.2 Αποτελέσματα επίλυσης

6.2.1 Αποτελέσματα χρήσης της διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας

Αρχικά, αφού ολοκληρώθηκε ο κώδικας βελτιστοποίησης, έγινε η πρώτη δοκιμή με μεταβλητή σχεδιασμού το μέτρο ελαστικότητας του Young (E). Η συνάρτηση-στόχος

επιλέχθηκε να είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου βέλους κάμψης της δοκού (και συγκεκριμένα του τετραγώνου του), δηλαδή $F=w_{max}^2$. Σε άλλες περιπτώσεις επιλέχθηκε μια ελαφρώς τροποποιημένη συνάρτηση-στόχος $F=(w_{max} - w_{target})^2$. Όλες οι περιπτώσεις παρουσιάζονται συνοπτικά στο συγκεντρωτικό πίνακα **6.1**:

Αριθμός περίπτωσης	Μεταβλητές σχεδιασμού	Συνάρτηση-στόχος
1	E	w_{max}^2
2	E	$(w_{max}-w_{tar})^2$
3	bw	$(w_{max}-w_{tar})^2$
4	h	$(w_{max}-w_{tar})^2$
5	bw, h	$(w_{max}-w_{tar})^2$
6	bw, E	$(w_{max}-w_{tar})^2$
7	bw, h, E	$(w_{max}-w_{tar})^2$
8	E	$(w_{max}-w_{tar})^2+(E-E_{tar})^2$
9	E	$w1(w_{max}-w_{tar})^2+w2(E-E_{tar})^2$
10	bw	V

Πίνακας 6.1: Οι περιπτώσεις βελτιστοποίησης που εξετάζονται στο κεφάλαιο 6.

*bw: πλάτος δοκού, h=πάχος δοκού, $w_{tar}=1.5mm$, $E_{tar}=180000MPa$, V= όγκος δοκού

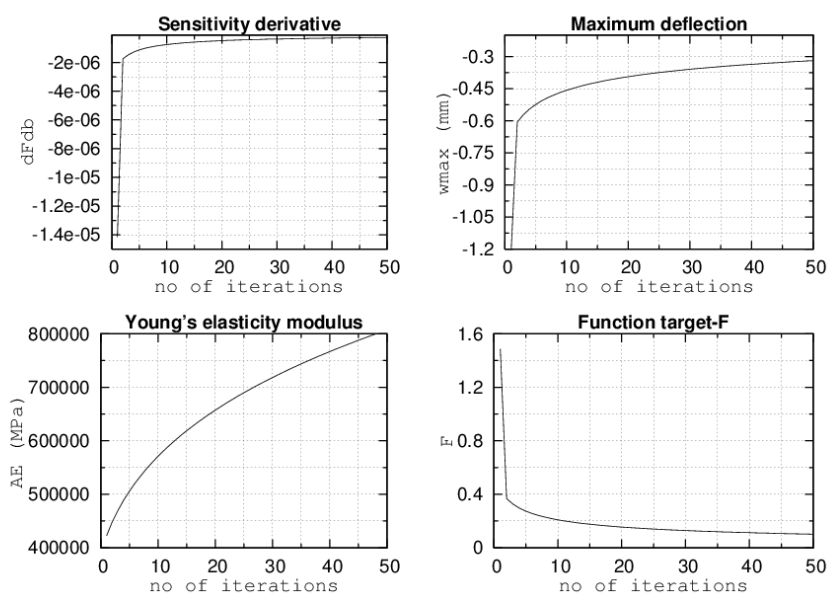
Τα αποτελέσματα για την πρώτη περίπτωση παρουσιάζονται στη συνέχεια:

Περίπτωση 1

-Μεταβλητές κατάστασης (*State variables*): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (*Design variables*): E (μέτρο Young)

-Συνάρτηση στόχος: $F = w_{max}^2$



Σχήμα 6.1: Αποτελέσματα περίπτωσης 1-*πάνω αριστερά*: παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), *κάτω αριστερά*: μέτρο ελαστικότητας του Young, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

Για την περίπτωση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί $\eta=10^{10}$ και έχουν γίνει 50 κύκλοι βελτιστοποίησης (optimization cycles). Στο **Σχήμα 6.1** κάτω αριστερά φαίνεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας, που όπως αναμένεται αυξάνεται συνεχώς με αποτέλεσμα να γίνεται πιο στιβαρή η δοκός και να ελαχιστοποιείται το βέλος κάμψης (τείνει συνεχώς προς το 0). Στο πάνω αριστερά διάγραμμα του **Σχήμα 6.1** απεικονίζεται το $\frac{\delta F}{\delta b}$ το οποίο αυξάνεται απότομα στην αρχή και στη συνέχεια, η τιμή του σχεδόν σταθεροποιείται. Στο πάνω-δεξιά διάγραμμα του ίδιου σχήματος φαίνεται το μέγιστο βέλος κάμψης που μειώνεται (κατ' απόλυτη τιμή) συνεχώς, όπως αναμένονταν. Τέλος, στο κάτω δεξιά διάγραμμα του ίδιου απεικονίζεται η συνάρτηση-στόχος που βαίνει μειούμενη καθώς αυξάνονται οι κύκλοι βελτιστοποίησης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το η έλαβε τόσο μεγάλη τιμή διότι λαμβάνει πολύ μικρή τιμή το $\frac{\delta F}{\delta b}$ σε σχέση με την τιμή του μέτρου ελαστικότητας (210000 MPa) και έτσι αν δοθεί μικρή τιμή στο η θα συγκλίνει πάρα πολύ αργά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Ας σημειωθεί επίσης ότι κρίθηκε σκόπιμο να μην συνεχιστεί η διαδικασία πέραν των 50 κύκλων βελτιστοποίησης διότι οι τιμές που έλαβε το E έγιναν αρκετά μεγάλες (τιμές που δεν αντιστοιχούν σε κάποιο υλικό).

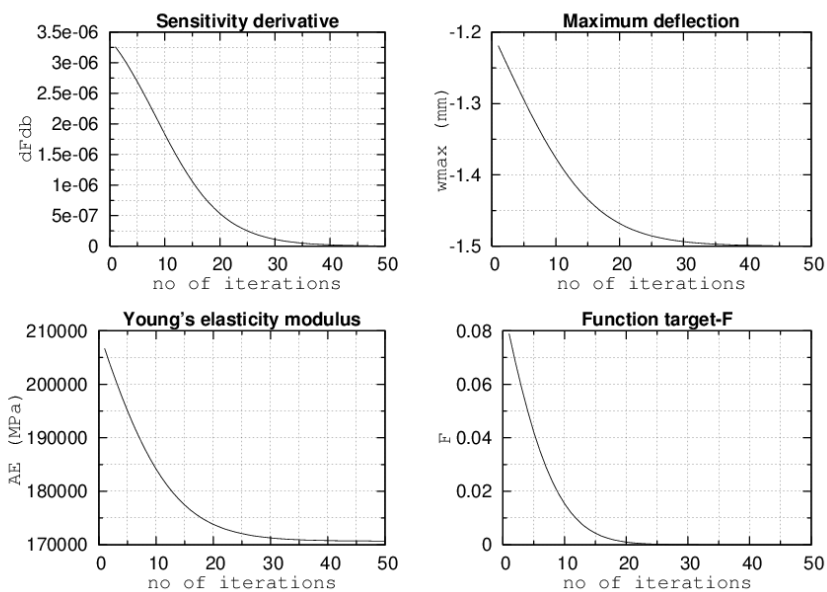
Περίπτωση 2

-Μεταβλητές κατάστασης (*State variables*): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (*Design variables*): E (μέτρο Young)

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$, όπου $w_{\text{tar}} = 1.5$ mm (όσες φορές στη συνέχεια αναφερθεί το w_{tar} θεωρείται ότι λαμβάνει τη συγκεκριμένη τιμή)

Σε σχέση με την περίπτωση 2 έχει αλλάξει η συνάρτηση-στόχος. Αναμένεται η συνάρτηση-στόχος να τείνει στο μηδέν όσο το βέλος κάμψης προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή που έχει τεθεί (w_{tar}). Αν τεθεί τιμή μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή από το w_{\max} τότε αναμένεται το μέτρο ελαστικότητας να μειώνεται.



Σχήμα 6.2: Αποτελέσματα περίπτωσης 2-**πάνω αριστερά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** συνάρτηση στόχος.

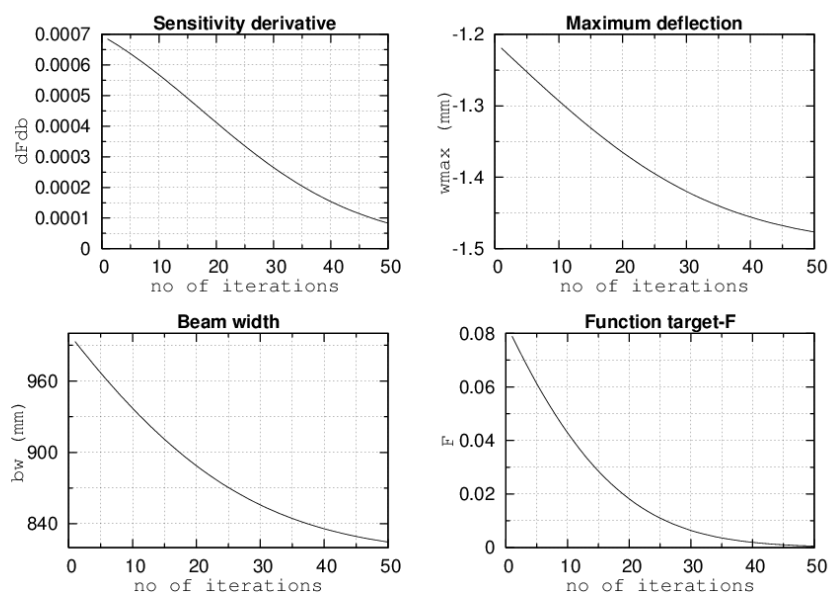
Τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι παρόμοια με αυτά της περίπτωσης 2. Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν είναι τα αναμενόμενα (βλ.Σχήμα 6.2) . Μια επιπρόσθετη παρατήρηση που αξίζει να γίνει είναι ότι για τον ίδιο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης, παρατηρείται πιο μεγάλος ρυθμός καθόδου όσο η επιθυμητή τιμή βέλους κάμψης είναι μεγαλύτερη.

Περίπτωση 3

-Μεταβλητές κατάστασης (*State variables*): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (*Design variables*): bw (το πλάτος της δοκού)

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$



Σχήμα 6.3: Αποτελέσματα περίπτωσης 3-*πάνω αριστερά*: παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), *κάτω αριστερά*: πλάτος της δοκού, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

Για την περίπτωση αυτή, μετά από σχετική διερεύνηση επιλέχθηκε $\eta=10000$. Το η είναι πολύ μικρότερο από αυτό της περίπτωσης 1 γιατί είναι πιο κοντά η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας στην τιμή του μεγέθους bw (πλάτος της δοκού) και δεν απαιτείται τόσο μεγάλη τιμή για να έχουμε σύγκλιση με «φυσιολογικό ρυθμό».

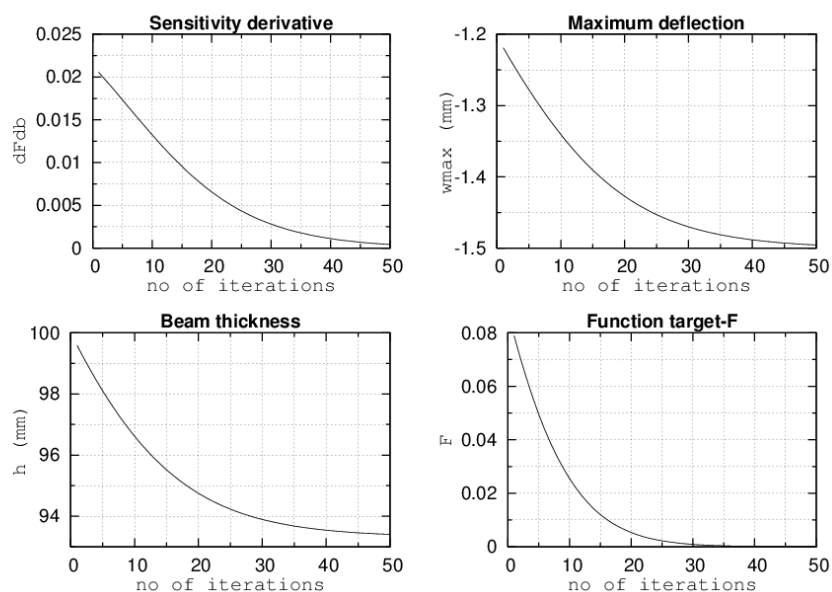
Όπως αναμένεται, επειδή μείωση του πλάτους της δοκού οδηγεί σε αύξηση του βέλους κάμψης αν οι άλλοι παράγοντες παραμείνουν σταθεροί (βλ. **Σχήμα 6.3**), παρατηρείται στο κάτω αριστερά διάγραμμα αυτή η μείωση του πλάτους της δοκού. Όπως αναμένεται, την ίδια στιγμή το μέγιστο βέλος κάμψης της δοκού αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή και η τιμή της συνάρτησης- στόχου τείνει στο μηδέν.

Περίπτωση 4

-Μεταβλητές κατάστασης (State variables): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables): h (το πάχος-ύψος της δοκού)

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$



Σχήμα 6.4: Αποτελέσματα περίπτωσης 4-*πάνω αριστερά*: παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), *κάτω αριστερά*: πάχος της δοκού, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

Για την περίπτωση αυτή μετά από σχετική διερεύνηση επιλέχτηκε $\eta=20$. Όπως και στην περίπτωση 3 έτσι και στην περίπτωση 4 η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας είναι αρκετά κοντά στην τιμή του μεγέθους οπότε δεν απαιτείται μεγάλο η για να έχουμε μια εμφανή μεταβολή σε κάθε κύκλο (Σχήμα 6.4). Το γεγονός ότι η τιμή του η είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες περιπτώσεις οφείλεται στο ότι το w σχετίζεται με μια μη-γραμμική σχέση με το h και έχει εντονότερη εξάρτηση από αυτό, δηλαδή μια μικρή μεταβολή στο h επηρεάζει περισσότερο το w απ' ό τι μια μικρή μεταβολή του bw ή του E .

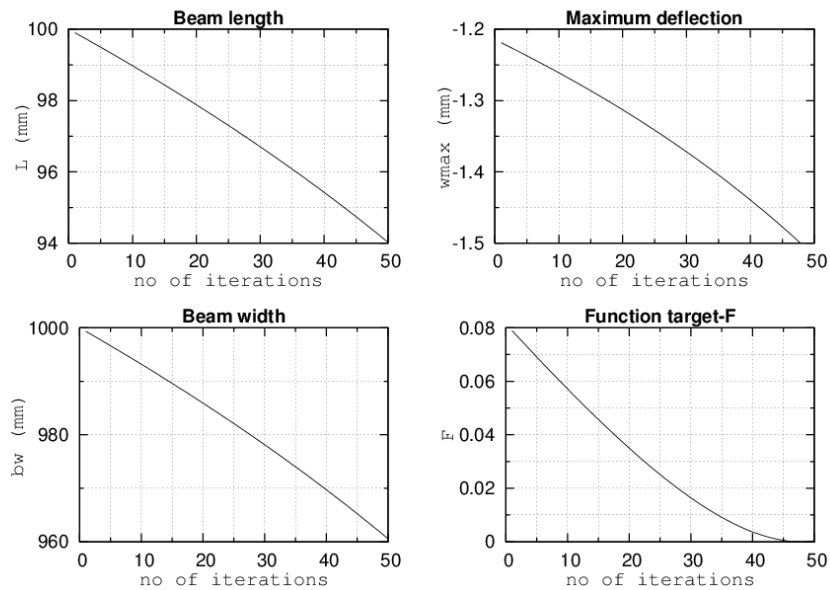
Περίπτωση 5

-Μεταβλητές κατάστασης (State variables): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables): bw , h

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$

Αν τεθούν οι κατάλληλες τιμές για το η τόσο στη διόρθωση του bw όσο και στη διόρθωση του h θα ληφθούν τα παρακάτω διαγράμματα:



Σχήμα 6.5: Αποτελέσματα περίπτωσης 5-**πάνω αριστερά:** πάχος της δοκού, **κάτω αριστερά:** πλάτος της δοκού, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** συνάρτηση στόχος.

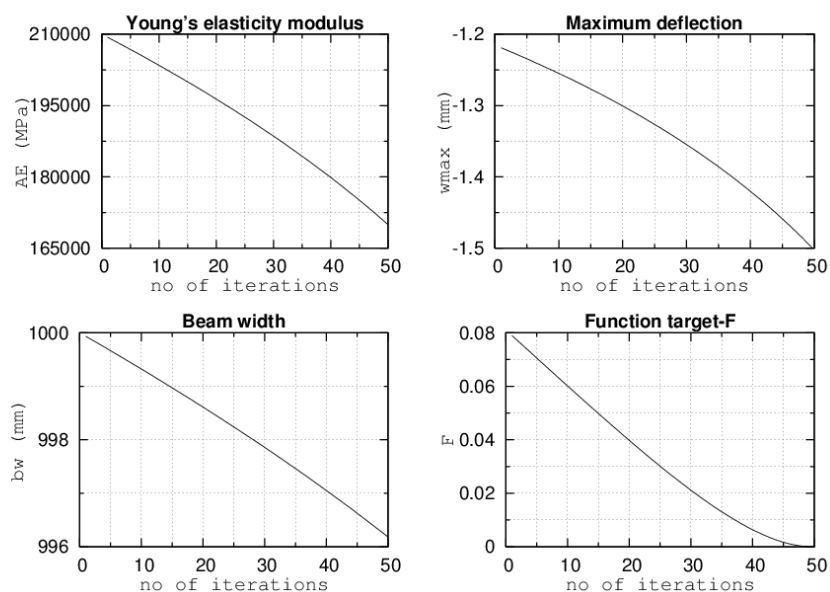
Τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα (Σχήμα 6.5). Επειδή υπάρχει μείωση τιμής σε δύο μεταβλητές σχεδιασμού, η συνάρτηση-στόχος λαμβάνει ακόμα μικρότερη τιμή από τις περιπτώσεις μίας μεταβλητής σχεδιασμού (όπως και για το w). Από αυτή την πρώτη περίπτωση με χρήση δύο μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να παρατηρηθεί ότι όταν υπάρχουν περισσότερες της μίας μεταβλητές σχεδιασμού, για να συγκλίνει με ικανοποιητικό ρυθμό η συνάρτηση στόχος χρειάζεται μια διαφοροποίηση στις τιμές του η και προσεκτική αντιμετώπιση διότι δεν συμβάλλουν στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου και όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού με τον ίδιο ρυθμό.

Περίπτωση 6

- Μεταβλητές κατάστασης (State variables): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables): bw, E

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$



Σχήμα 6.6: Αποτελέσματα περίπτωσης 6-*πάνω αριστερά*: πλάτος της δοκού, *κάτω αριστερά*: μέτρο ελαστικότητας του Young, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

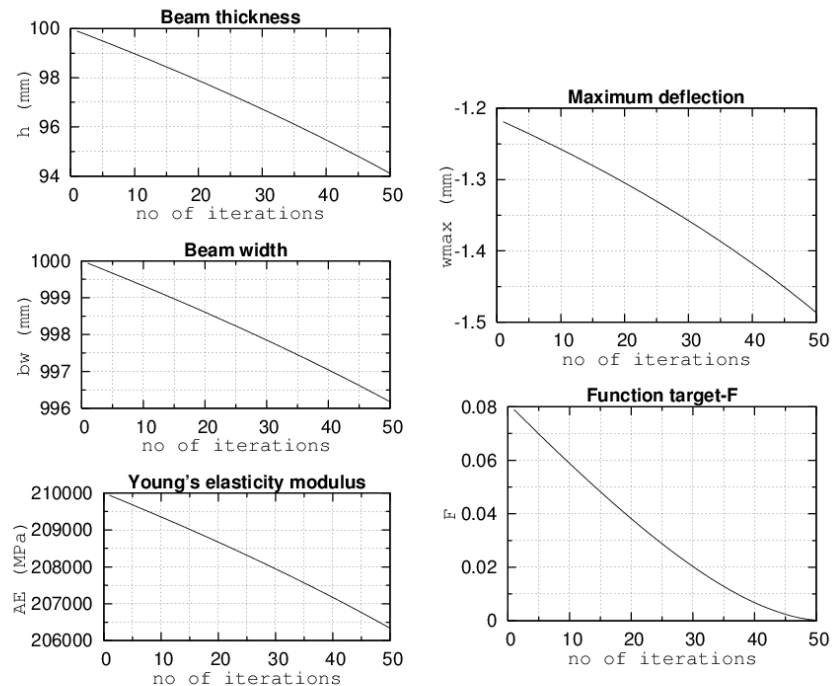
Τα αποτελέσματα και σ' αυτή την περίπτωση είναι αναμενόμενα (Σχήμα 6.6). Με μείωση του E και του bw αυξάνεται το μέγιστο βέλος κάμψης. Η συνάρτηση στόχος και το μέγιστο βέλος κάμψης έχουν λίγο καλύτερη σύγκλιση απ' ότι στις περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκε μόνο η μία από τις δύο μεταβλητές σχεδιασμού. Η μεταβλητή E παρουσιάζει λίγο πιο αργή σύγκλιση απ' ότι στην περίπτωση 2 (ενώ έχουμε χρησιμοποιήσει το ίδιο η και τον ίδιο αριθμό κύκλων βελτιστοποίησης).

Περίπτωση 7

-Μεταβλητές κατάστασης (State variables): w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables): bw, h, E

-Συνάρτηση στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$



Σχήμα 6.7: Αποτελέσματα περίπτωσης 7-*πάνω αριστερά*: πάχος δοκού, *αριστερά στο μέσον*: πλάτος της δοκού, *κάτω αριστερά*: μέτρο ελαστικότητας του Young, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

Σ' αυτή την περίπτωση εξετάστηκαν τρεις μεταβλητές σχεδιασμού. Από τα διαγράμματα (Σχήμα 6.7) φαίνεται ότι η σύγκλιση της συνάρτησης στόχο προς το μηδέν είναι παρόμοια με αυτή σε προηγούμενες περιπτώσεις λόγω κατάλληλης επιλογής των η ώστε να επιτευχθούν οι κατάλληλοι «συμβιβασμοί» μεταξύ των επιδράσεων που έχουν οι αλλαγές στη τιμή κάθε μεταβλητής σε κάθε κύκλο. Οι τρεις μεταβλητές έχουν περίπου τις ίδιες τελικές τιμές που είχαν και σε άλλες περιπτώσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε παρόμοιες περιπτώσεις, μετά από προσεκτική επιλογή του η , είναι δυνατό να επιτευχθεί γρήγορη σύγκλιση για τη συνάρτηση στόχο, διότι τώρα υπάρχει μεγαλύτερη ευελιξία αφού είναι δυνατό να αλλάζουν τρεις διαφορετικές μεταβλητές.

Περίπτωση 8

-*Μεταβλητές κατάστασης (State variables):* w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

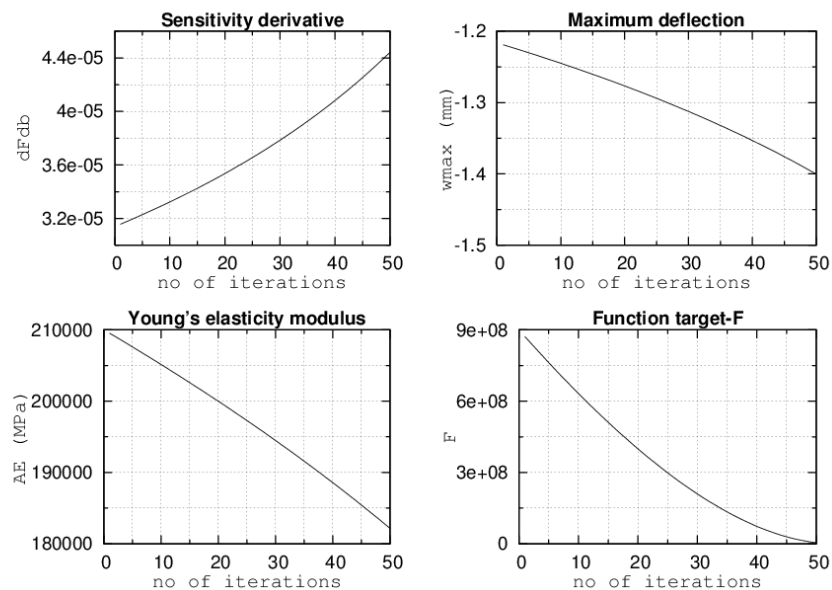
-*Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables):* E

-*Συνάρτηση στόχος:* $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2 + (E - E_{\text{tar}})^2$

Στην περίπτωση 8 χρησιμοποιείται μια άλλη συνάρτηση στόχος, που περιλαμβάνει και έναν όρο που σχετίζεται με μια μεταβλητή σχεδιασμού. Έτσι ο στόχος είναι να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο βέλος κάμψης αλλά και ένα συγκεκριμένο μέτρο ελαστικότητας. Ανάλογα με τις τιμές των w_{tar} και E_{tar} μπορεί αυτοί οι στόχοι να είναι ανταγωνιστικοί (δηλαδή επίτευξη του συγκεκριμένου w_{tar} να προϋποθέτει αύξηση του E ενώ το E_{tar} (επιθυμητό) να είναι μικρότερο).

Επειδή το E παίρνει μεγάλες τιμές, θεωρήθηκε σκόπιμο (στην περίπτωση 9) να χρησιμοποιηθούν σε μια άλλη περίπτωση συντελεστές μπροστά στους δύο όρους για να μπορούν να λαμβάνονται και οι δύο υπόψη με παραπλήσια βαρύτητα (να μην υπερισχύει πολλές τάξεις μεγέθους ο ένας όρος του άλλου και άρα ο όρος διόρθωσης να διαμορφώνεται ουσιαστικά μόνο από τον ένα όρο της συνάρτησης στόχου).

Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί μόνο μία μεταβλητή σχεδιασμού για λόγους απλότητας. Σε επόμενη περίπτωση (που αφορά βέβαια άλλη συνάρτηση στόχο), θα εξεταστούν περισσότερες της μίας μεταβλητές σχεδιασμού.



Σχήμα 6.8: Αποτελέσματα περίπτωσης 8-*πάνω αριστερά*: παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), *κάτω αριστερά*: μέτρο ελαστικότητας του Young, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

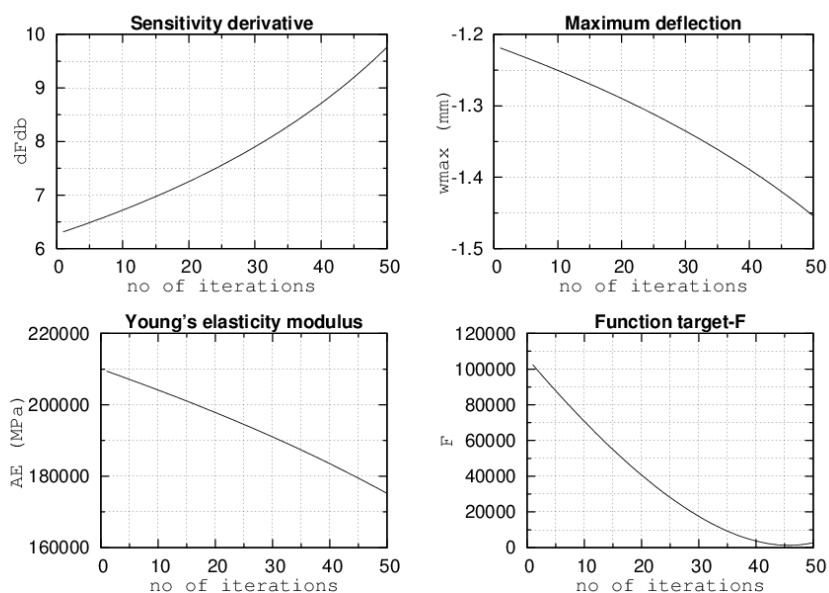
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, μετά την εξαγωγή των αποτελεσμάτων έγινε φανερό ότι είναι αναγκαίο να τεθούν συντελεστές μπροστά από κάθε όρο της συνάρτησης στόχου για να έχουμε την επιθυμητή σύγκλιση. Επειδή η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας ήταν πολύ μεγάλη χρειάστηκε πολύ μικρό η για να εξαχθούν φυσιολογικά αποτελέσματα. Όπως φαίνεται στα διαγράμματα (Σχήμα 6.8), τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα αν και η σύγκλιση της συνάρτησης στόχου μοιάζει πολύ απότομη λόγω της μεγάλης τιμής που παίρνει στην αρχή (επειδή ο όρος $(E-E_{tar})^2$ είναι πολύ μεγάλος).

Περίπτωση 9

-*Μεταβλητές κατάστασης (State variables)*: w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-*Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables)*: E

-Συνάρτηση στόχος: $F= w1*(w_{max} - w_{tar})^2+w2*(E-E_{tar})^2$



Σχήμα 6.9: Αποτελέσματα περίπτωσης 9-*πάνω αριστερά*: παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), *κάτω αριστερά*: μέτρο ελαστικότητας του Young, *πάνω δεξιά*: μέγιστο βέλος κάμψης, *κάτω δεξιά*: συνάρτηση στόχος.

Σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση, τώρα οι τιμές της παραγώγου ευαισθησίας είναι μικρότερες και η σύγκλιση της συνάρτησης στόχου πιο ομαλή. Παράλληλα, τα αποτελέσματα για το E και το wmax είναι αναμενόμενα (**Σχήμα 6.9**).

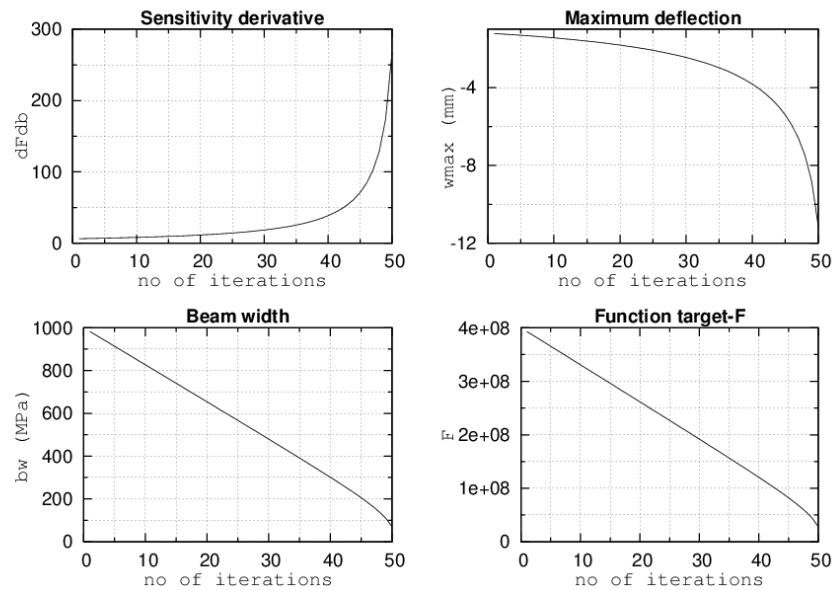
Περίπτωση 10

-*Μεταβλητές κατάστασης (State variables)*: w (βέλος κάμψης), β (γωνία στροφής)

-*Μεταβλητές σχεδιασμού (Design variables)*: bw

-*Συνάρτηση στόχος*: $F= V$ (ελαχιστοποίηση του όγκου της δοκού)

Στην περίπτωση 10, στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του όγκου της δοκού. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μάζας ή του βάρους των κατασκευών είναι συνηθισμένο πρόβλημα στη βελτιστοποίηση κατασκευών. Αρχικά θα χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή σχεδιασμού μόνο το πλάτος της δοκού bw.



Σχήμα 6.10: Αποτελέσματα περίπτωσης 10-**πάνω αριστερά:** παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ($\frac{dF}{db}$), **κάτω αριστερά:** μέτρο ελαστικότητας του Young, **πάνω δεξιά:** μέγιστο βέλος κάμψης, **κάτω δεξιά:** συνάρτηση στόχος.

Όπως αναμένεται, η ελαχιστοποίηση του όγκου θα γίνει με ελαχιστοποίηση του bw(Σχήμα 6.10). Υπάρχει όμως ένας φυσικός περιορισμός: το bw δεν μπορεί να μηδενιστεί και πρακτικά δεν μπορεί να γίνει πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις γιατί το στερεό δεν θα είναι πια δοκός. Ο αρχικός όγκος ήταν $4 \cdot 10^8 \text{ mm}^3$ και τελικά έγινε μικρότερος από 10^8 mm^3 . Ως συνέπεια της μείωσης του όγκου, το μέγιστο βέλος κάμψης αυξάνει (κατ' απόλυτη τιμή) μη γραμμικά διότι ελαττώνεται η ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού.

6.2.2 Αποτελέσματα επίλυσης με πεπερασμένες διαφορές

Πριν υλοποιηθεί ο κώδικας της βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, είχε υλοποιηθεί ένας κώδικας υπολογισμού της παραγώγου ευαισθησίας με χρήση πεπερασμένων διαφορών (κεντρικές διαφορές). Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, επειδή απαιτούνται 2 τιμές σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης για να υπολογιστεί η παράγωγος με πεπερασμένες διαφορές το κόστος είναι διπλάσιο σε σύγκριση με μεθόδους οι οποίες απαιτούν ένα μόνο τρέξιμο του κώδικα αξιολόγησης για υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας σε κάθε κύκλο.

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} = \frac{F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (6.11)$$

Ο κώδικας αυτός χρησιμοποιήθηκε αρχικά για να συγκριθεί η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας όπως υπολογίστηκε από τον κώδικα που κάνει χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου με την τιμή που προκύπτει από τις πεπερασμένες διαφορές ώστε να είναι σίγουρο ότι δίνει σωστά αποτελέσματα. Για να γίνει αυτό έγινε αρχικά μια διερεύνηση της τιμής που

δίνουν οι πεπερασμένες διαφορές για την παράγωγο ευαισθησίας σε σχέση με το ϵ που επιλέγεται.

Τα στοιχεία της περίπτωσης που εξετάζεται είναι ίδια με αυτά της περίπτωσης(1 ή 2) που εξετάσαμε στην προηγούμενη υποενότητα.

α/α	ϵ	παρ/γος ευαισθησίας
1	1e-1	-1.415302*10e-5
2	1e-2	-1.413260*10e-5
3	1e-3	-1.441237*10e-5
4	1e-4	-1.244202*10e-5
5	1e-5	-9.660404*10e-6
6	1e-6	2.586886*10e-5
7	1e-7	-3.807681*10e-3
8	1e-8	3.316658*10e-3
9	1e-9	-4.328331*10e-1

Πίνακας 6.2: Διακύμανση της τιμής της παραγώγου ευαισθησίας ανάλογα με το ϵ που επιλέγεται.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.2, η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας βρίσκεται κοντά στην τιμή $-1e-5$ για ϵ έως $1e-5$. Για μικρότερα ϵ , η τιμή αλλάζει πρόσημο ή αυξάνεται τείνοντας προς το μηδέν. Άρα θεωρείται ότι πρέπει να επιλεγεί ϵ μέχρι περίπου την τιμή $1e-5$.

Άρα αφού θεωρείται ότι η ορθή τιμή που λαμβάνεται από τον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας με πεπερασμένες διαφορές είναι της τάξης του $-1e-5$ αυτό σημαίνει ότι με τη διακριτή συζυγή μέθοδο υπολογίστηκε με καλή ακρίβεια η τιμή της παραγώγου (τιμή περίπου $-1.4 \cdot 10^{-5}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Εφαρμογή αεροελαστικής βελτιστοποίησης σε πτέρυγα αεροσκάφους

7.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί μια περίπτωση βελτιστοποίησης, στην οποία θα χρησιμοποιηθεί ως πρωτεύων κώδικας ο κώδικας δομικής ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 6 και ο οποίος θα επιλύει μια πτέρυγα αεροσκάφους που υπόκειται σε αεροδυναμικές φορτίσεις, οι οποίες υπολογίζονται από κώδικα υπολογιστικής ρευστομηχανικής που λύνει τις 2D εξισώσεις Euler.

Η περίπτωση που εξετάζεται εντάσσεται στην κατηγορία της βελτιστοποίησης σχήματος (shape optimization). Η αεροτομή της πτέρυγας περιγράφεται με καμπύλη Bezier με 14 σημεία ελέγχου (control points). Αλλάζοντας τις θέσεις των σημείων Bezier, επιδιώκεται να δοθεί κατάλληλο σχήμα στην αεροτομή ώστε η μέγιστη μετατόπιση της πτέρυγας υπό την επίδραση αεροδυναμικών φορτίσεων να μην ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή.

Επομένως, τα χαρακτηριστικά της περίπτωσης αυτής μπορούν να αναφερθούν συνοπτικά ως:

Χαρακτηριστικά περίπτωσης:

-μεταβλητές κατάστασης: w, β , (και έμμεσα οι ρευστοδυναμικές μεταβλητές ρ_i, \vec{v}_i, T_i)

-μεταβλητές σχεδιασμού: \hat{x}_i, \hat{y}_i (τα 14 σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bézier)

-Συνάρτηση-στόχος: $F = (w_{\max} - w_{\text{tar}})^2$, όπου $w_{\text{tar}} = 5 \text{ mm}$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης σε γενικές γραμμές παραμένουν ίδιες όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όμως:

Στη συγκεκριμένη περίπτωση απαιτείται (για να γίνει η ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης) ο υπολογισμός των παραγώγων $\frac{\partial F}{\partial \hat{x}_i}$ και $\frac{\partial F}{\partial \hat{y}_i}$ ο οποίος θα γίνει με χρήση του κανόνα της αλυσίδας ως εξής:

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}_i} = \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \hat{y}_i} \quad (7.2)$$

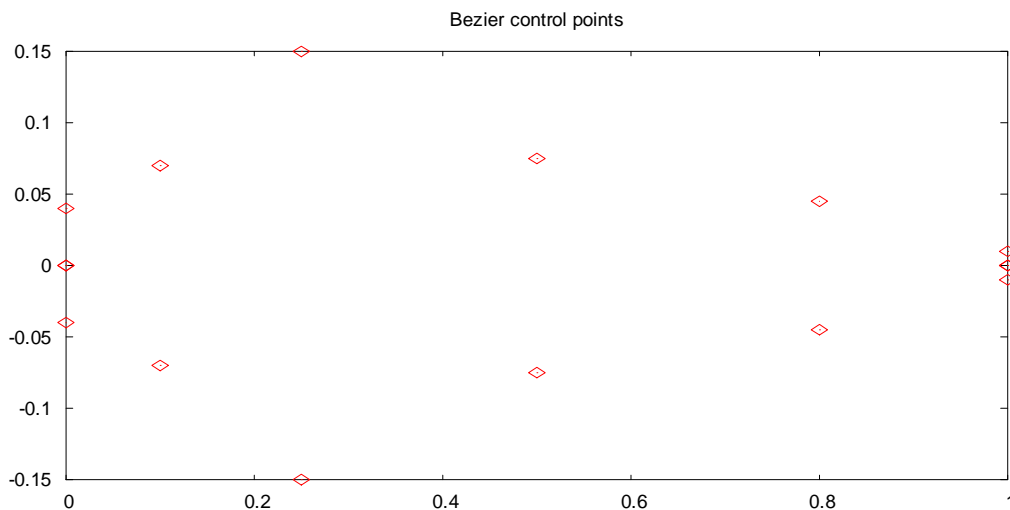
Η παράγωγος της συνάρτησης στόχου ως προς τη ροπή αδράνειας I , $\frac{\partial F}{\partial I}$ υπολογίζεται με τη διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 6 και γίνεται αφού ολοκληρωθεί η δομική ανάλυση. Η παράγωγος της ροπής αδράνειας ως προς τις συντεταγμένες κατά x και κατά y

των σημείων ελέγχου Bezier ($\frac{\partial I}{\partial x_i}$ ή $\frac{\partial I}{\partial y_i}$ αντίστοιχα) γίνεται από ξεχωριστό κώδικα που θα περιγραφεί στη συνέχεια. Τέλος, γίνεται ο πολλαπλασιασμός αυτών των ποσοτήτων και λαμβάνονται οι τιμές των ζητούμενων παραγώγων.

7.2 Περιγραφή διαδικασίας

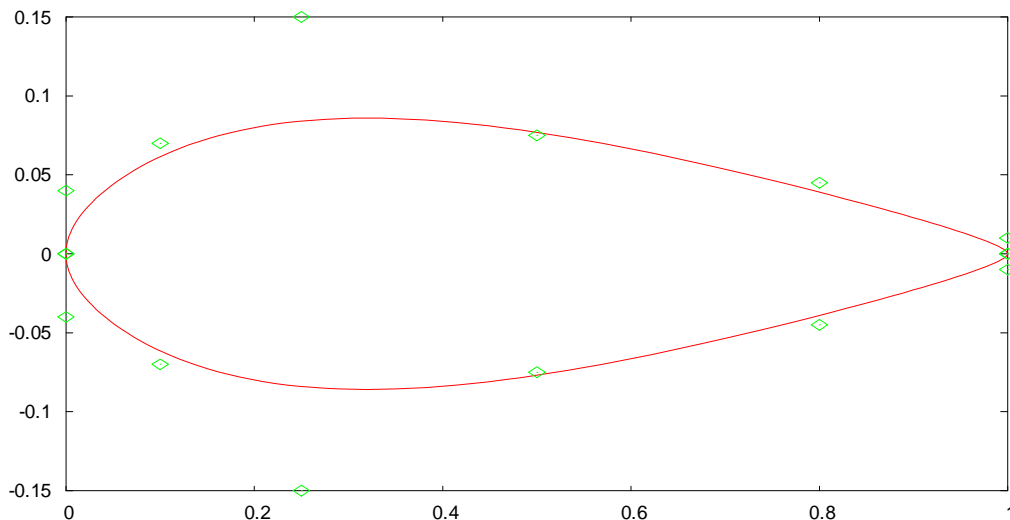
Στη συνέχεια, θα περιγραφεί αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε αναφέροντας τα βασικά στοιχεία που περιλαμβάνει κάθε στάδιο της διαδικασίας.

Αρχικά, χρησιμοποιείται μια συγκεκριμένη μορφή αεροτομής (όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7.2**). Για την αεροτομή όπως προαναφέρθηκε, έχουν χρησιμοποιηθεί 14 σημεία Bezier (τα δύο σημεία είναι στην ακμή προσβολής και την ακμή εκφυγής και υπάρχουν από 6 σημεία στην κάθε πλευρά). Τα ακραία σημεία (στην ακμή προσβολής ή στην ακμή εκφυγής) διατηρούνται σταθερά (δηλαδή δεν αλλάζουν κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης) ενώ τα 2 σημεία που βρίσκονται πιο κοντά στα σημεία ελέγχου και στις δύο άκρες της αεροτομής δεν μετακινούνται κατά x . Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της βελτιστοποίησης, θα ανανεώνεται σε κάθε κύκλο η μορφή της αεροτομής.



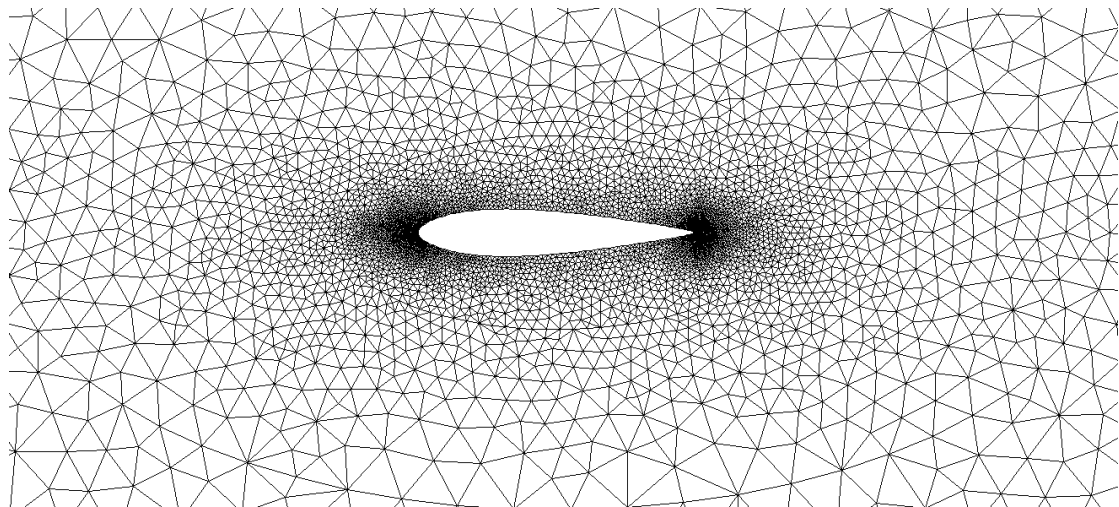
Σχήμα 7.1: Οι αρχικές θέσεις των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier.

Έχοντας τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier ((\hat{x}_i, \hat{y}_i) -βλ. **Σχήμα 7.1**), με κλήση του κώδικα "CreateContour" δημιουργείται η καμπύλη Bezier με τον επιθυμητό αριθμό σημείων (x_i, y_i) και παράγεται ένα αρχείο στο οποίο αποθηκεύονται οι συντεταγμένες αυτών των σημείων.



Σχήμα 7.2: Περίγραμμα αεροτομής και σημεία ελέγχου Bezier.

Στη συνέχεια, πριν γίνει η επίλυση με τον κώδικα υπολογιστικής ρευστομηχανικής, πρέπει να παραχθεί το διδιάστατο υπολογιστικό μη-δομημένο πλέγμα γύρω από την αεροτομή (τμήμα του οποίου απεικονίζεται στο Σχήμα 7.3). Αυτό παράγεται από τον κώδικα “hybgridgen2d” που δέχεται ως είσοδο τις συντεταγμένες των σημείων της αεροτομής και παράγει αρχεία που περιγράφουν το πλέγμα και τους υπολογιστικούς όγκους.



Σχήμα 7.3: Τμήμα του υπολογιστικού πλέγματος γύρω από την αεροτομή.

Η επίλυση της ροής γύρω από την αεροτομή γίνεται με τον κώδικα f2d ο οποίος λειτουργεί παρόμοια με τον κώδικα f3d που χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 5 για τον κώδικα αεροελαστικής ανάλυσης. Ο κώδικας αυτός επιλύει τις 2D εξισώσεις Euler και έχει τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να δίνει στην έξοδο αρχείο με τους συντελεστές άνωσης (c_L , coefficient of lift) και οπισθέλκουσας (c_D , coefficient of drag).

Το επόμενο βήμα είναι η δομική ανάλυση της πτέρυγας με κώδικα πεπερασμένων στοιχείων τύπου δοκού. Θα χρησιμοποιηθεί ο ίδιος κώδικας που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο (γραμμένος σε Fortran 77) με ορισμένες αλλαγές:

- Υπολογίζει τη ροπή αδράνειας της αεροτομής με δεδομένο τις συντεταγμένες των σημείων της αεροτομής του περιγράμματος.
- Διαβάζει από αρχείο τη δύναμη άνωσης στην αεροτομή.
- Υπολογίζει τις ζητούμενες παραγώγους ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου.

Έπειτα καλείται ο κώδικας που υπολογίζει τις παραγώγους $\frac{\partial I}{\partial x_i}$ και $\frac{\partial I}{\partial y_i}$. Ο υπολογισμός γίνεται με πεπερασμένες διαφορές (κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας):

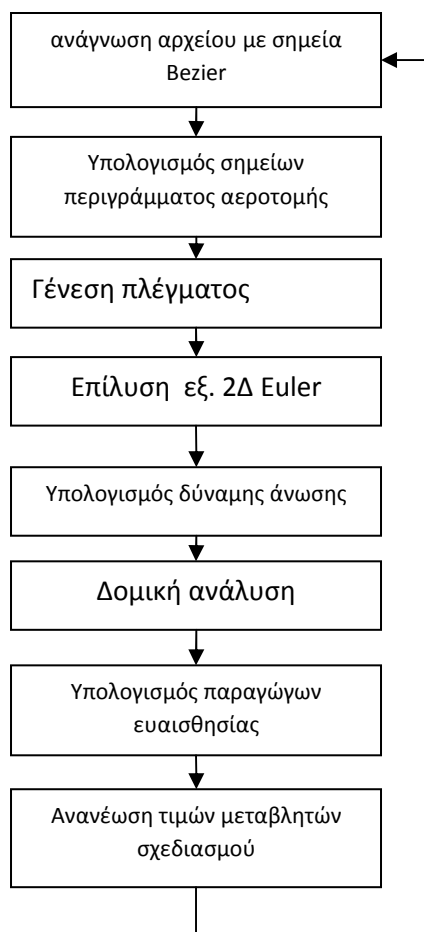
$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = \frac{I(x_i+\varepsilon)-I(x_i-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad \frac{\partial I}{\partial y_i} = \frac{I(y_i+\varepsilon)-I(y_i-\varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (7.3)$$

Αρχικά ο κώδικας διαβάζει τα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bezier και στη συνέχεια υπολογίζει τις τιμές $x+\varepsilon$, $x-\varepsilon$, $y+\varepsilon$, $y-\varepsilon$ για τα σημεία ελέγχου της πλευράς υποπίεσης και της πλευράς υπερπίεσης. Μετά από κάθε υπολογισμό καλείται το πρόγραμμα CreateContour, υπολογίζει τις συντεταγμένες των σημείων της αεροτομής με δεδομένα τα μετατοπισμένα σημεία ελέγχου και υπολογίζεται η ροπή αδράνειας από τον αντίστοιχο κώδικα ώστε να δημιουργηθούν οι ποσότητες $I(x-\varepsilon)$, $I(x+\varepsilon)$, $I(y-\varepsilon)$, $I(y+\varepsilon)$. Τέλος γράφει τις τιμές των παραγώγων που υπολογίστηκαν σε αρχείο.

Ο τελευταίος κώδικας που καλείται σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης είναι ο κώδικας που θα υπολογίσει την τιμή των παραγώγων ευαισθησίας, της συνάρτησης στόχου και θα ανανεώσει τις τιμές των σημείων ελέγχου. Αυτός ο κώδικας διαβάζει τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου του τρέχοντος κύκλου από αρχείο (καθώς και το η) και γράφει στο ίδιο αρχείο τις νέες τιμές τους.

Όλοι οι κώδικες που χρειάζονται για έναν κύκλο βελτιστοποίησης καλούνται από έναν γενικό κώδικα στον οποίο επίσης ορίζεται ο αριθμός των κύκλων βελτιστοποίησης. Οι τιμές της συνάρτησης στόχου και του μέγιστου βέλους κάμψης αποθηκεύονται σε αρχείο σε κάθε επανάληψη, ώστε στη συνέχεια να γίνουν οι κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.

Η διαδικασία που περιγράφηκε απεικονίζεται γραφικά στο διάγραμμα ροής στο **Σχήμα 7.4**:



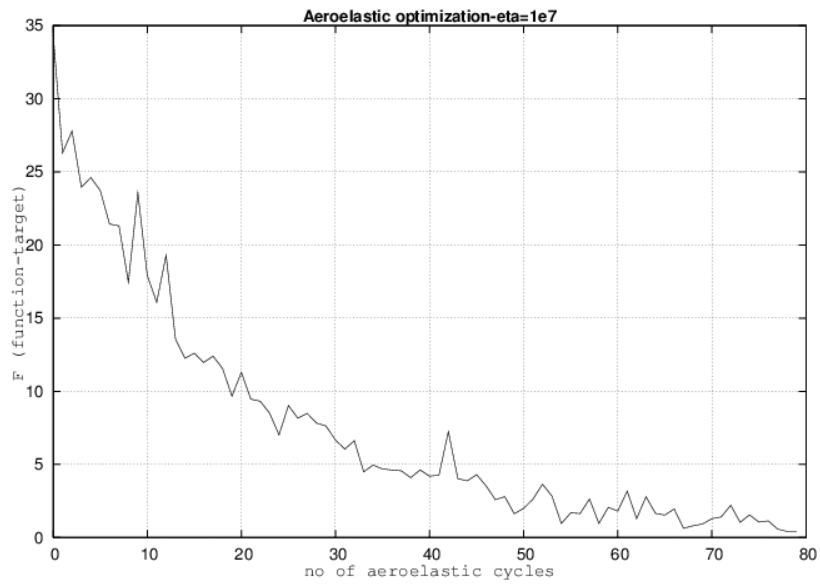
Σχήμα 7.4: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

7.3 Αποτελέσματα επίλυσης

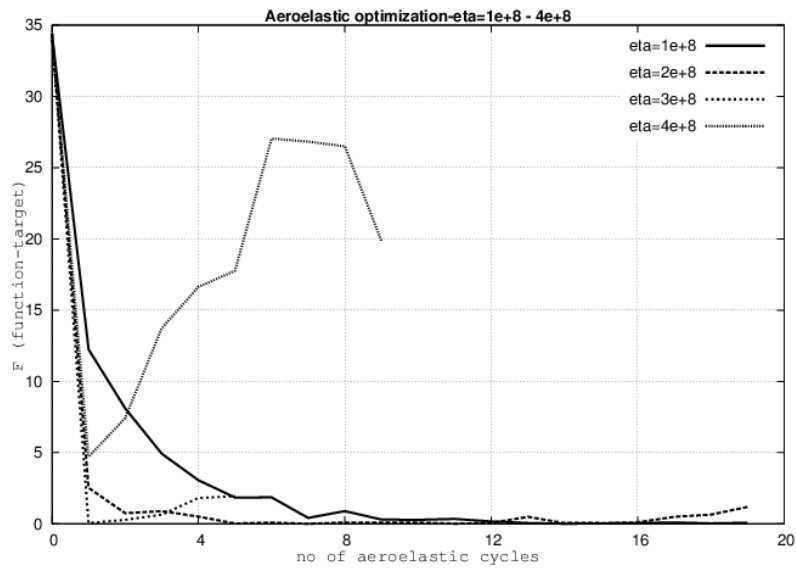
Αφού ολοκληρώθηκε η περιγραφή της διαδικασίας βελτιστοποίησης, θα παρουσιαστούν και θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα επίλυσης αυτής της περίπτωσης.

Στόχος είναι να επιτευχθεί το ζητούμενο αποτέλεσμα (μέγιστο βέλος κάμψης 5mm) σε όσο το δυνατόν λιγότερους κύκλους βελτιστοποίησης δεδομένου του υπολογιστικού κόστους που έχει το τρέξιμο των διαφόρων κωδίκων (κυρίως ο f2d είναι ο πιο χρονοβόρος). Έτσι, έγινε μια διερεύνηση όσον αφορά τον παράγοντα η που πρέπει να επιλεγεί. Έγιναν δοκιμές με $\eta=10^7, 10^8, 2*10^8, 3*10^8, 4*10^8, 4.5*10^8, 5*10^8, 6*10^8$.

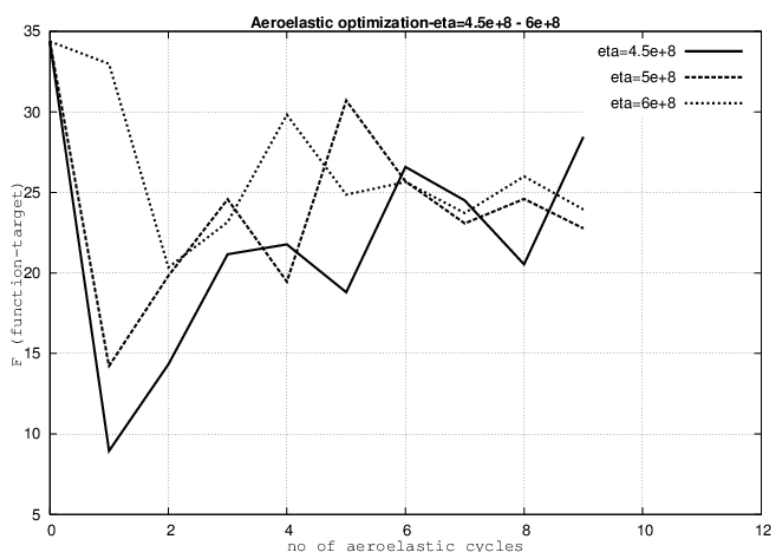
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα σχήματα 7.5, 7.6, 7.7 με τα αποτελέσματα της σύγκλισης ανάλογα με το η που επιλέχθηκε σε κάθε περίπτωση:



Σχήμα 7.5: Πορεία σύγκλισης των τιμών της συνάρτησης στόχου για $\eta=10^7$.



Σχήμα 7.6: Πορεία σύγκλισης των τιμών της συνάρτησης στόχου για $\eta=10^8$ έως $\eta=4 \cdot 10^8$.



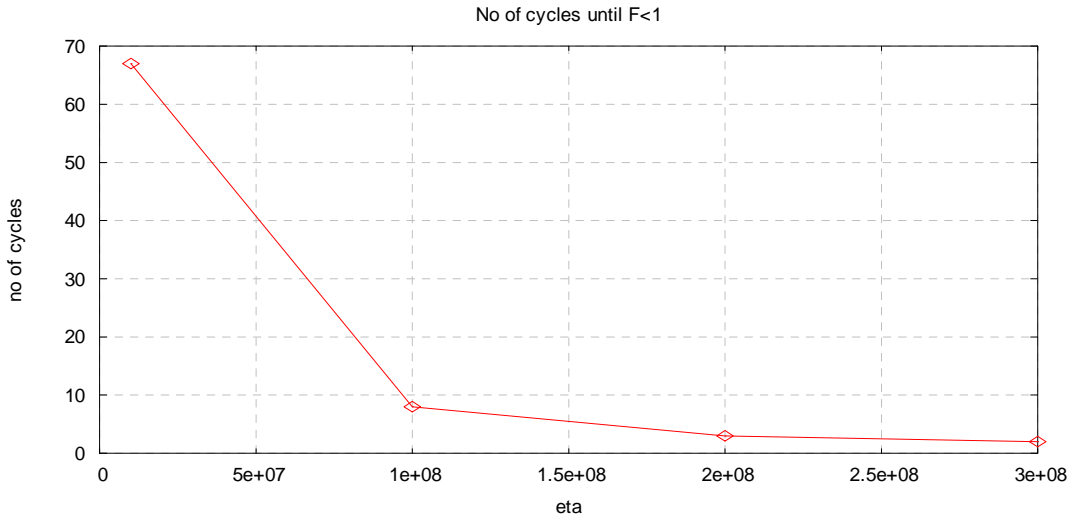
Σχήμα 7.7: Πορεία σύγκλισης της συνάρτησης-στόχου για $\eta=4.5 \cdot 10^8$ έως $6 \cdot 10^8$.

Όπως φαίνεται από τα σχήματα 7.5, 7.6, 7.7, καθώς το η αυξάνει, οι τιμές της συνάρτησης στόχου μειώνονται ολοένα και πιο απότομα μέχρι και την περίπτωση όπου $\eta = 3 \cdot 10^8$ που παρατηρείται μέσα σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης ουσιαστικά να προσεγγίζεται το μηδέν. Αυτό δικαιολογείται διότι όσο αυξάνεται το η τόσο μεγαλύτερες τιμές λαμβάνει ο όρος της διόρθωσης και οι τιμές τείνουν να προσεγγίσουν τις βέλτιστες. Στις επόμενες περιπτώσεις, η διόρθωση λαμβάνει τέτοια τιμή ώστε μέσα σε έναν κύκλο να ξεπεράσει τον στόχο (5mm) και να κατέβει σε πολύ μικρότερες τιμές μέγιστου βέλους κάμψης με αποτέλεσμα να αυξάνεται και πάλι η τιμή της συνάρτησης στόχου (αφού ξεπεράστηκε ο στόχος) και να αποκλίνει η διαδικασία.

Παρατηρείται ότι για $\eta=10^7$ ενώ γενικά η διαδικασία συγκλίνει όσο περνούν οι κύκλοι βελτιστοποίησης, παρ' όλα αυτά σε ορισμένες περιπτώσεις λαμβάνονται μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης στόχου και μετά συνεχίζεται η κάθοδος. Στις επόμενες περιπτώσεις, μέχρι το $\eta = 2 \cdot 10^8$ η σύγκλιση γίνεται με γρήγορο ρυθμό στους πρώτους κύκλους και στο τέλος υπάρχει μια μείωση στις τιμές μέχρι να επιτευχθεί ο στόχος. Όπως φαίνεται (από τα δεδομένα που περιλαμβάνει ο Πίνακας 7.1 και από το σχήμα 7.8) ο αριθμός των κύκλων βελτιστοποίησης που απαιτείται για να μειωθεί η τιμή της συνάρτησης στόχου κάτω από 1 και 0.1 μειώνεται μη-γραμμικά (σχεδόν εκθετικά) καθώς αυξάνει το η .

η	F<1	F<0.1
10^7	67 κύκλοι	80< κύκλοι
10^8	8 κύκλοι	14 κύκλοι
$2 \cdot 10^8$	3 κύκλοι	6 κύκλοι
$3 \cdot 10^8$	2 κύκλοι	2 κύκλοι

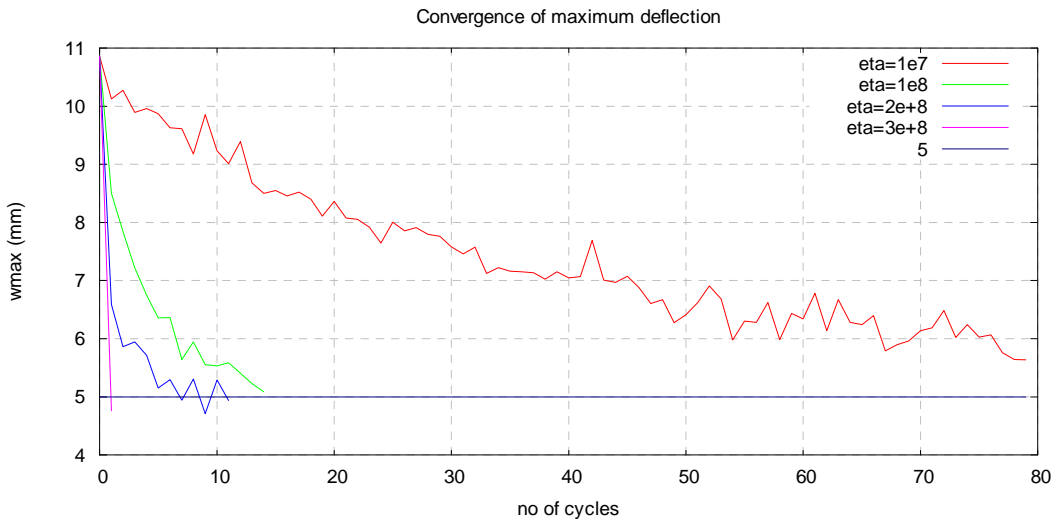
Πίνακας 7.1: Αριθμός κύκλων βελτιστοποίησης που απαιτούνται για να μειωθεί η τιμή της συνάρτησης στόχου κάτω από 1 και 0.1.



Σχήμα 7.8: Αριθμός κύκλων βελτιστοποίησης που απαιτούνται για να μειωθεί η τιμή της συνάρτησης στόχου κάτω από 1 συναρτήσει του η που επιλέχθηκε.

Αυτό καταδεικνύει ότι η σωστή επιλογή του η σ' αυτήν την περίπτωση παρέχει σημαντικό όφελος γιατί μπορεί να μειώσει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος και να επιτευχθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα σε μικρό αριθμό κύκλων.

Στο σχήμα 7.9 απεικονίζεται η τιμή που λαμβάνει το μέγιστο βέλος κάμψης σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ανάλογα με το η που επιλέχθηκε.

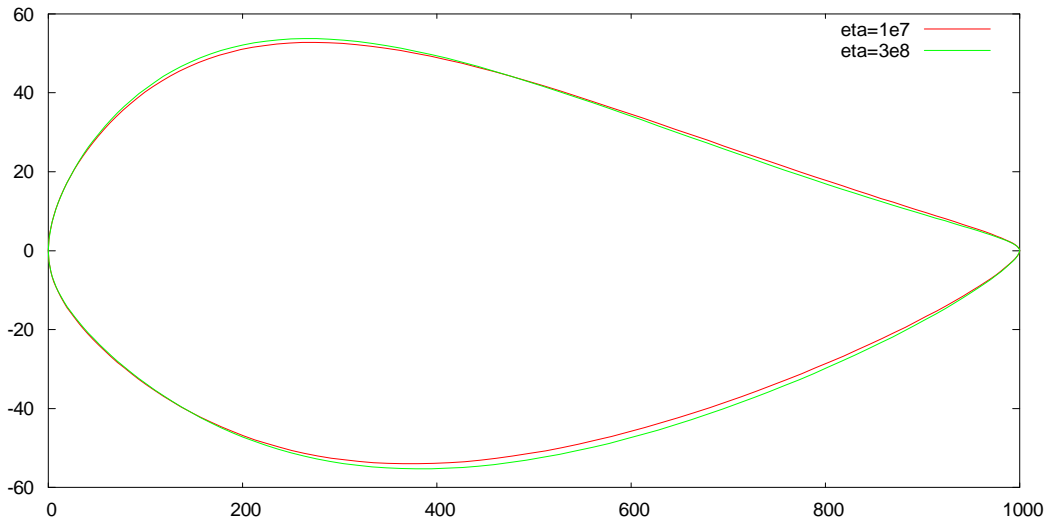


Σχήμα 7.9: Πορεία σύγκλισης του μέγιστου βέλους κάμψης για διάφορα η .

Για την περίπτωση με $\eta = 10^7$ φαίνεται ότι η πορεία σύγκλισης προς την επιθυμητή τιμή του βέλους κάμψης έχει ίδια μορφή με την πορεία σύγκλισης της συνάρτησης στόχου προς το μηδέν. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις προσεγγίζουν ταχύτατα την επιθυμητή τιμή, όπως αναμενόταν και από την πορεία σύγκλισης της συνάρτησης στόχου που σχολιάστηκε προηγουμένως.

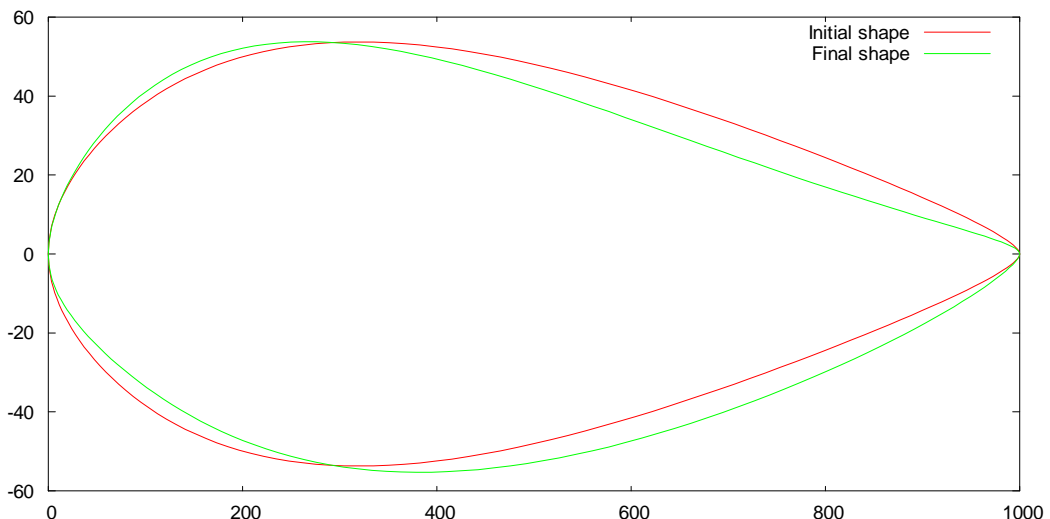
Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί και θα σχολιαστεί η μορφή της αεροτομής όπως προέκυψε σε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με το η που επιλέχθηκε (σχήμα 7.10). Σε όλες τις

περιπτώσεις η τιμή της F είχε φτάσει πολύ κοντά στο 0 ($10^{-2} \dots 10^{-3}$) και οι μορφές είναι περίπου ίδιες αν παρασταθούν σε κοινό διάγραμμα γι' αυτό επιλέχθηκε να παρουσιαστούν 2 περιπτώσεις, για $\eta = 10^7$, $\eta = 3 \cdot 10^8$. Οι δύο μορφές φαίνεται να ταυτίζονται πρακτικά στα περισσότερα σημεία εκτός από ένα κομμάτι στην πλευρά υπερπίεσης και ένα μικρό κομμάτι στην πλευρά υποπίεσης που φαίνεται ότι η πράσινη ($\eta = 3 \cdot 10^8$) καμπύλη βρίσκεται εξωτερικά της κόκκινης καμπύλης ($\eta = 10^7$).

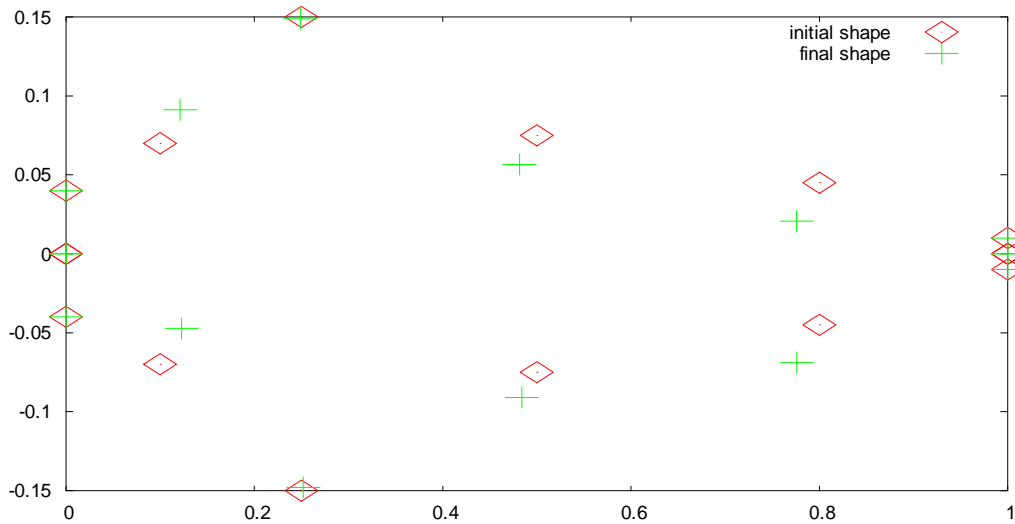


Σχήμα 7.10: Μορφή της αεροτομής στις περιπτώσεις με $\eta=10^7$ και $\eta=3 \cdot 10^8$.

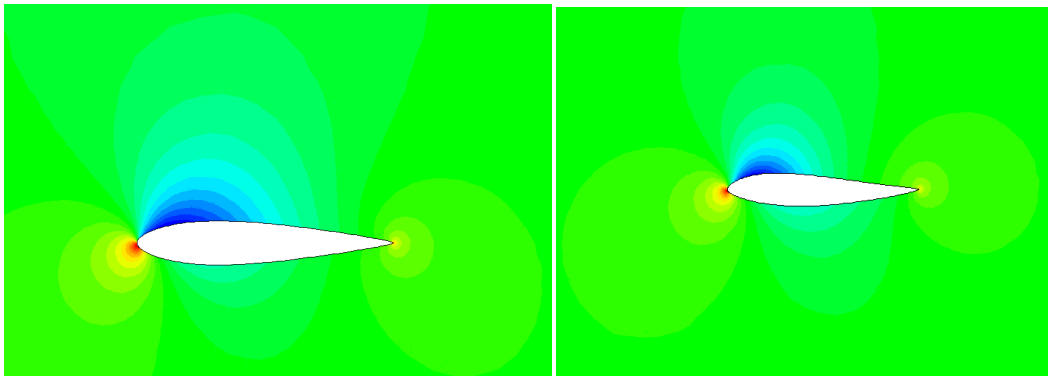
Αν συγκριθεί η τελική μορφή της αεροτομής με την αρχική της μορφή όπως γίνεται στο **σχήμα 7.11** υπάρχουν εμφανείς διαφορές. Φαίνεται ότι η αεροτομή στην τελική της μορφή γίνεται πιο απότομη προς την ακμή εκφυγής και λιγότερο πεπλατυσμένη στην ακμή προσβολής ενώ δεν είναι πλέον συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 7.11: Αρχική και τελική μορφή της αεροτομής (οι άξονες δεν έχουν ίδια κλίμακα, άρα η αεροτομή δεν είναι τόσο πεπλατυσμένη όσο φαίνεται).

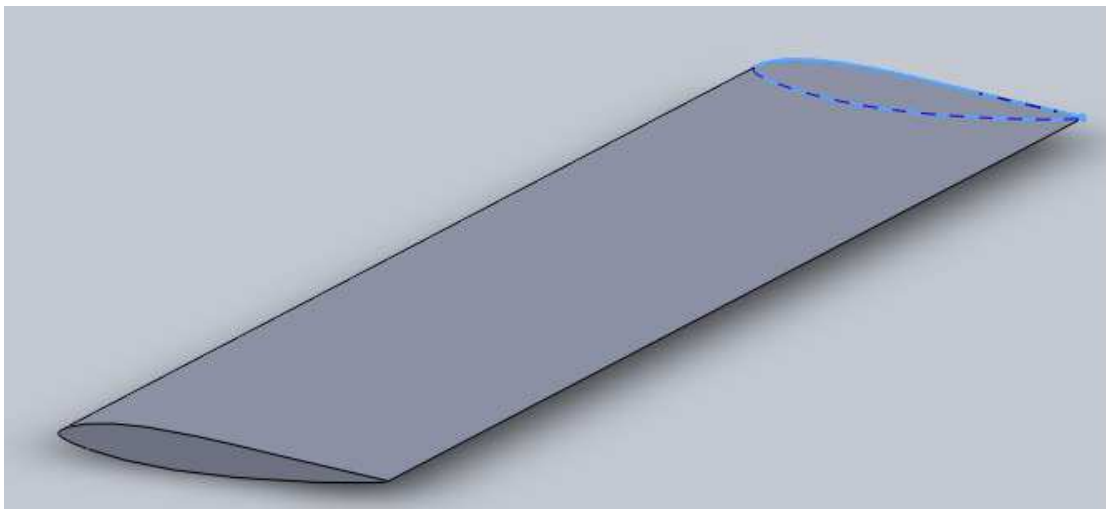


Σχήμα 7.12: Αρχικές και τελικές θέσεις σημείων ελέγχου Bezier.



Σχήμα 7.13: Το πεδίο πιέσεων γύρω από την αρχική και την τελική αεροτομή.

Τέλος, παρουσιάζεται μια 3D αναπαράσταση της πτέρυγας στην τελική της μορφή:



Σχήμα 7.14: Η πτέρυγα στην τελική της μορφή.

7.4 Προσθήκη όρων από την αεροδυναμική επίλυση στο αεροελαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης

Κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης στην προηγούμενη ενότητα η διακριτή συζυγής μέθοδος εφαρμόστηκε για το «δομικό» κομμάτι του προβλήματος ενώ το ρευστομηχανικό κομμάτι χρησίμευσε μόνο ως επιλύτης για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίσεων. Ωστόσο, η μεταβολή των ροϊκών μεγεθών δεν είναι ανεξάρτητη της μεταβολής των «δομικών» μεγεθών και το αντίστροφο, δηλαδή το βέλος κάμψης επηρεάζεται από την μεταβολή της αεροδυναμικής φόρτισης η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση των πιέσεων (ροϊκό μέγεθος) στην αεροτομή.

Έτσι, η ακριβής επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης της ενότητας 7.3 απαιτεί την χρήση κατάλληλων μεγεθών που προκύπτουν από την ρευστοδυναμική επίλυση και κυρίως, τον κώδικα βελτιστοποίησης με χρήση της διακριτής συζυγούς για υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας του ρευστοδυναμικού προβλήματος. Έπειτα, θα διατυπωθούν οι εξισώσεις στην περίπτωση της ακριβούς επίλυσης του προβλήματος και θα γίνουν παρατηρήσεις αναφορικά με τις αλλαγές που πρέπει να γίνουν στον υπάρχοντα κώδικα βελτιστοποίησης για την περίπτωση της ενότητας 7.4.

Και πάλι, θα χρησιμοποιηθεί η ίδια συνάρτηση-στόχος η οποία είναι της μορφής:

$$F=(w_{\max}-w_{\min})^2 \quad (7.4)$$

Αν ονομαστεί το \vec{U} διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του ρευστομηχανικού προβλήματος και \vec{W} το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης του δομικού προβλήματος τότε, στην γενική μορφή η συνάρτηση-στόχος είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$$F = F(\vec{U}(\vec{b}), (\vec{W}(\vec{b}), \vec{b})) \quad (7.5)$$

Δηλαδή, εξαρτάται τόσο από τις μεταβλητές κατάστασης του δομικού προβλήματος όσο και από τις μεταβλητές κατάστασης του ρευστομηχανικού προβλήματος και επίσης από τις μεταβλητές σχεδιασμού είτε έμμεσα (μέσω των διανυσμάτων των μεταβλητών κατάστασης) είτε άμεσα. Η εξάρτηση από το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης του ρευστομηχανικού προβλήματος προκύπτει διότι το βέλος κάμψης επηρεάζεται από το φορτίο που επιβάλλεται στην πτέρυγα, το οποίο προκύπτει από τη ρευστοδυναμική επίλυση.

Τώρα, η μεταβολή της συνάρτησης στόχου ορίζεται ως:

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{W}} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{b}} \quad (7.6)$$

αλλά επειδή, στην περίπτωση που εξετάζεται στο κεφάλαιο 7, η συνάρτηση-στόχος δεν περιλαμβάνει κάποια μεταβλητή σχεδιασμού ή ρευστοδυναμικό μέγεθος, οι όροι $\frac{\partial F}{\partial \vec{b}}$, $\frac{\partial F}{\partial \vec{U}}$ απαλείφονται και μένει μόνο ο όρος $\frac{\partial F}{\partial \vec{W}} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{b}}$.

Οι εξισώσεις που διέπουν το πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή είναι οι εξισώσεις Euler και στη γενική μορφή, με χρήση του τελεστή R (όπως έχει γίνει και στις άλλες περιπτώσεις που εξετάστηκαν στα κεφάλαια 6 και 7) γράφονται:

$$R_F = R_F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{W}(\vec{b}), \vec{b}) = 0 \quad (7.7)$$

Οι εξισώσεις που διέπουν το δομικό πρόβλημα είναι οι εξισώσεις ελαστικότητας διατυπωμένες με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στην περίπτωση των πεπερασμένων στοιχείων δοκού:

$$R_S = R_S(\vec{U}(\vec{b}), \vec{W}(\vec{b}), \vec{b}) = [K][x] - [f] = 0 \quad (7.8)$$

Η επαυξημένη συνάρτηση-στόχος γράφεται:

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{dF}{d\vec{b}} + \Psi_F \frac{dR_F}{d\vec{b}} + \Psi_S \frac{dR_S}{d\vec{b}} \quad (7.9)$$

όπου τα διαφορικά $\frac{dR_F}{d\vec{b}}$, $\frac{dR_S}{d\vec{b}}$ θα προκύψουν από τις σχέσεις 7.7 και 7.8 με κατάλληλες παραγωγίσεις:

$$\frac{\partial R_S}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial R_S}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial R_S}{\partial \vec{W}} \frac{d\vec{W}}{d\vec{b}} = 0 \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial R_F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial R_F}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial R_F}{\partial \vec{W}} \frac{d\vec{W}}{d\vec{b}} = 0 \quad (7.11)$$

άρα με βάση τις σχέσεις 7.9, 7.7, 7.8, η επαυξημένη συνάρτηση γράφεται:

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{W}} \frac{d\vec{W}}{d\vec{b}} + \Psi_S \left(-\frac{\partial R_S}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}} - \frac{\partial R_S}{\partial \vec{W}} \frac{d\vec{W}}{d\vec{b}} \right) + \Psi_F \left(-\frac{\partial R_F}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}} - \frac{\partial R_F}{\partial \vec{W}} \frac{d\vec{W}}{d\vec{b}} \right) \quad (7.12)$$

Η κεντρική ιδέα της συζυγούς μεθόδου, όπως έχει προαναφερθεί, είναι να καταστεί η μεταβολή της συνάρτησης-στόχου ανεξάρτητη των μεταβολών του πεδίου ροής και να συναρτάται μόνο της μεταβολής του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b} , δηλαδή να είναι μηδενικοί οι όροι που πολλαπλασιάζονται με το $\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{b}}$ και το $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{b}}$ στην σχέση που δίνει την συνάρτηση-στόχο:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{W}} - \Psi_F \frac{\partial R_F}{\partial \vec{W}} - \Psi_S \frac{\partial R_S}{\partial \vec{W}} = 0 \quad (7.13)$$

$$-\Psi_F \frac{\partial R_F}{\partial \vec{U}} - \Psi_S \frac{\partial R_S}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (7.14)$$

Από αυτές τις εξισώσεις είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα πεδία των συζυγών μεταβλητών των «ρευστοδυναμικών» μεγεθών Ψ_F και των «δομικών» μεγεθών Ψ_S και, στη συνέχεια, από τη σχέση 7.9 να υπολογισθεί η παράγωγος ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Έτσι, λοιπόν, με χρήση ενός κώδικα βελτιστοποίησης του προβλήματος ρευστοδυναμικής, θα μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης και στη συνέχεια να συγκριθούν τα αποτελέσματα με αυτά της ενότητας 7.3 . Αυτό αποτελεί πρόταση μελλοντικής εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: Ανακεφαλαίωση- Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε κώδικας στατικής αεροελαστικότητας για την πρόλεξη της συμπεριφοράς μιας τριδιάστατης πτέρυγας αεροσκάφους υπό αεροδυναμικές φορτίσεις, εφαρμόστηκε η μέθοδος της απότομης καθόδου με χρήση διακριτής συζυγούς μεθόδου για υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας σε πρόβλημα δομικής μηχανικής καθώς και σε πρόβλημα στατικής αεροελαστικής ανάλυσης μιας πτέρυγας αεροσκάφους υπό αεροδυναμική φόρτιση.

Αρχικά, προγραμματίστηκαν κώδικες υπολογιστικής δομικής μηχανικής (σε περιβάλλον MATLAB™) με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και ειδικότερα με πεπερασμένα στοιχεία δοκού και πεπερασμένα στοιχεία πλάκας. Για τα πεπερασμένα στοιχεία πλάκας, διερευνήθηκε η χρήση τριγωνικών, ορθογωνικών και ισοπαραμετρικών πεπερασμένων στοιχείων και, τελικά, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί κώδικας με ισοπαραμετρικά τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία πλάκας. Οι κώδικες πιστοποιήθηκαν σε μια γνωστή περίπτωση δομικής ανάλυσης (δοκός και πλάκα σε πρόβολο με φόρτιση μόνο στο ελεύθερο άκρο).

Έπειτα, αναπτύχθηκε ο κώδικας στατικής αεροελαστικότητας στον οποίο για το τμήμα της δομικής ανάλυσης χρησιμοποιήθηκαν οι κώδικες πεπερασμένων στοιχείων δοκού και πλάκας που προαναφέρθηκαν και για το τμήμα της ρευστοδυναμικής ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε κώδικας της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) ο οποίος επιλύει τις 3D Euler γύρω από πτέρυγα AGARD 445.6. Εξετάστηκε η χρήση του επιφανειακού πλέγματος γύρω από την πτέρυγα που χρησιμοποιείται στο ρευστοδυναμικό κώδικα και στη δομική ανάλυση με στοιχεία πλάκας αλλά και η χρήση διαφορετικής πυκνότητας πλέγματος στις δύο αναλύσεις. Το συμπέρασμα ήταν ότι η επίλυση είναι πιο ακριβής και αποδίδεται πολύ καλύτερα η μορφή της παραμορφωμένης πτέρυγας με χρήση ξεχωριστού πλέγματος για την δομική ανάλυση, το οποίο να είναι κατάλληλα προσαρμοσμένο μόνο γι' αυτή την ανάλυση. Επίσης μελετήθηκε και η σύγκλιση του αεροελαστικού κώδικα στον οποίο γίνονται διαδοχικοί κύκλοι επίλυσης με τον ρευστοδυναμικό και δομικό κώδικα μέχρι τα υπολογιζόμενα φορτία μεταξύ δύο κύκλων να συγκλίνουν σύμφωνα με το κριτήριο που ορίστηκε. Παρατηρήθηκε ότι σε περιπτώσεις που το πλέγμα της ρευστοδυναμικής ανάλυσης και το πλέγμα της δομικής ανάλυσης έχουν σχεδόν παρόμοιο αριθμό κόμβων, η σύγκλιση επιτυγχάνεται πιο αργά από τις περιπτώσεις που το δομικό πλέγμα είναι πολύ αραιότερο. Παρόμοια συμπεράσματα εξήχθησαν και με την χρήση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων δοκού. Ο κώδικας με πεπερασμένα στοιχεία πλάκας πιστοποιήθηκε μέσω σύγκρισης με το εμπορικό λογισμικό Solidworks 2009™.

Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε η μέθοδος της απότομης καθόδου με χρήση της διακριτής συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε απλές και λίγο πιο σύνθετες περιπτώσεις δομικής βελτιστοποίησης. Για την δομική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος κώδικας πεπερασμένων στοιχείων δοκού με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, αλλά γραμμένος σε γλώσσα FORTRAN 77 με ορισμένα πρόσθετα χαρακτηριστικά. Παρατηρήθηκε η ταχεία σύγκλιση του κώδικα βελτιστοποίησης. Ο κώδικας πιστοποιήθηκε μέσω σύγκρισης των παραγώγων ευαισθησίας που υπολογίστηκαν με αυτές που υπολογίζονται με χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Τέλος, μελετήθηκε η περίπτωση της βελτιστοποίησης μορφής μιας πτέρυγας αεροσκάφους υπό αεροδυναμική φόρτιση. Για το δομικό κομμάτι χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων δοκού ενώ για το ρευστοδυναμικό κώδικα επίλυσης των 2D εξισώσεων Euler γύρω από αεροτομή που περιγράφεται με καμπύλη Bezier. Διαπιστώθηκε και σε αυτή την περίπτωση η ταχεία σύγκλιση του κώδικα βελτιστοποίησης και προτάθηκαν αλλαγές στον κώδικα ώστε, σε μελλοντική εργασία, να συμπεριληφθούν κατάλληλα και όροι που υποδηλώνουν την συνεισφορά των αεροδυναμικών μεγεθών (από αντίστοιχο κώδικα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης) στις εξισώσεις του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Βιβλιογραφία

- AER. (n.d.). Ανάκτηση από <http://www.scribd.com/doc/59234770/Aeroelasticity>
- Akgul, M. (2012). *Static Aeroelastic Analysis of a generic slender missile using a loosely coupled fluid structure interaction method*.
- Akgun, M. A., Kavukcuoglu, K., & Oktay, E. (2005). An uncoupled procedure for wing flutter analysis. *AIAA* .
- Anderson, J. D. (2000). *Introduction to Flight, Fourth Edition*. New York: Mc Graw-Hill.
- Bisplinghoff, R., & Ashley, H. (1975). *Principles of Aeroelasticity*. New York: Dover Publications, Inc.
- Carson Yates, E. *AGARD standard aeroelastic configurations for dynamic response*. Hampton: NASA Langley Research Center.
- Carson Yates, E. (1985). *AGARD standard aeroelastic configurations for dynamic response*. Hampton.
- Chandrupatla, T. R., & Belegundu, A. D. (2005). *Εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία για Μηχανικούς*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- COE. (n.d.). Ανάκτηση από www.coe.neu.edu
- COOLFLUID. (n.d.). Ανάκτηση από coolfluidsrv.vki.ac.be
- CSPFEA. (n.d.). Ανάκτηση από www.cspfea.net
- FAA. (2008). *Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge*. US Department of Transportation, FAA, Flight Standards Service.
- Felippa, C. A. (2004). *Introduction to Finite Element Methods*. Colorado: University of Colorado (Σημειώσεις Μαθήματος).
- Fielding, J. P. (1999). *Introduction of Aircraft Design*. Cambridge: Cambridge University Press.
- FRE. (n.d.). *The Free Dictionary by Farlex*. Ανάκτηση από www.thefreedictionary.com
- FSX. (n.d.). *Flight Sim 2004*. Ανάκτηση από www.flightsim2004-fanatics.com
- Ghali, A., & Neville, A. M. *Structural Analysis: A unified Classical and Matrix Approach*.
- Guruswamy, G. (2001, Σεπτέμβριος 14). A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations. *Computers and Structures* .
- Hoffman, J., Jansson, J., & Stockli, M. (n.d.). Unified Continuum modeling of 3D fluid-structure interaction.

- Hrabok, M. M., & Hrudey, T. M. (1984). A review and catalogue of plate bending finite elements.
- Hughes, T. J. (2000). *The Finite Element Method: Linear, Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New York: Dover Publications Inc.
- Kamakoti, R., & Shyy, W. (2005, Μάρτιος 8). Fluid-structure interaction fro aeroelastic applications. *Progress in Aerospace sciences* .
- Kattan, P. *Πεπερασμένα Στοιχεία με το MATLAB*. Fountas.
- Krishnamoorthy, C. S. *Finite Element Analysis Theory and Programming*.
- Kwon, Y. W., & Bang, H. (1997). *The Finite Element Method using MATLAB*. New York: CRC Press.
- Logan. (2005). *An Introduction to the Finite Element method*. New York: McHill.
- Macneal, H. R. (1993). *Finite elements: Their Design and performance*. Marcel Dekker Inc.
- Merriam-Webster*. (n.d.). Ανάκτηση από www.merriam-webster.com
- OCW*. (n.d.). Ανάκτηση από <http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-01-unified-engineering-i-ii-iii-iv-fall-2005-spring-2006/systems-labs-06/spl10b.pdf>
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows. *Computers and Fluids, Vol.36* , σσ. 325-341.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2008). Aerodynamic Shape Optimization using Adjoint and Direct Approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering (State of the Art Reviews), Vol. 15(4)* , σσ. 447-488.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2008). Computation of the Hessian Matrix in Aerodynamic Inverse Design using Continuous Adjoint Formulations. *Computers and Fluids, Vol 37* , σσ. 1029-1039.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007 (3)). Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.53* , σσ. 455-469.
- Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). Total Pressure Losses Minimization in Turbomachinery Cascades, Using a New Continuous Adjoint Formulation. *Proc. IMechE, Part A: Journal of Power and Energy (Special Issue on Turbomachinery), Vol.221* , σσ. 865-872.
- Piperno, S. (1992, May). Numerical Methods used in Aeroelasticity Simulations.
- S.Rao, S. (2004). *The Finite Element Method in Engineering, Fourth Edition*. Elsevier Science & Technology Books.

- Smith, M., Hodges, D., & Cesnik, C. (1995). *An evaluation of computational algorithms to interface between CFD and CSD methodologies*. Atlanta: Georgia Institute of Technology.
- Smith, M., Hodges, D., & Cesnik, C. (2000, March). Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structure Interactions. *Journal of Aircraft* .
- Taig, I. C. (1996, November 3). Modelling for the Finite Element Method. *AGARD Lecture Series No.147, Practical Application of Finite Element Analysis to Aircraft Structure Design* .
- WIK. (n.d.). Ανάκτηση από en.wikipedia.com
- WIV. (n.d.). Ανάκτηση από Wikiversity: en.wikiversity.org
- Zymaris, A. S., Papadimitriou, D. I., & Giannakoglou, K. C. (2007). Continuous Adjoint Approach to the Spalart Allmaras Turbulence Model, for Incompressible Flows. *Computers and Fluids, Vol. 38* , σσ. 455-469.
- Αγγλοελληνικό λεξικό όρων . (2002). ΤΕΕ.
- Γιαννάκογλου, Κ. (2006). *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Αθήνα: σημειώσεις Ε.Μ.Π.
- Θεοτόκογλου, Ε., & Τσαμασφύρος, Γ. Ι. (2005). *Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων Ι*. Αθήνα: ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.
- Καββαδίας, Ι. (2011). *Προγραμματισμός επιλύτη 3D εξισώσεων ροής ατρίβους ρευστού σε δομημένα πλέγματα σε κάρτες γραφικών*.
- Παπαδρακάκης, Μ. (2001). *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*. Αθήνα: Παπασωτηρίου.