ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

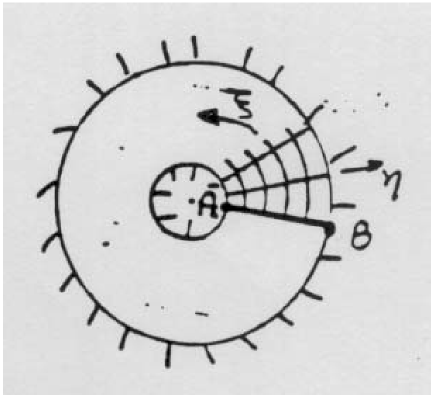
ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Επ. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΑΣΚ1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΥΠΟΔΕΙΞΗ ΛΥΣΗΣ

Άσκηση 1:

Δείξτε ότι ένα δομημένο πλέγμα τύπου Ο μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων ακτίνας R_1 και R_2 (έστω $R_1 \langle R_2$), που σχηματίζεται από πλεγματικές γραμμές τους ακτινικά ισαπέχοντες κύκλους (είναι οι γραμμές η=σταθερό) και περιφερειακά ισαπέχοντα τμήματα ακτίνων (είναι οι γραμμές ξ=σταθερό) δεν ικανοποιεί, την εξίσωση Laplace $\left(f^1 = f^2 = 0\right)$. Στη συνέχεια, προτείνετε μιά ακτινική κατανομή των πλεγματικών γραμμών ξ=σταθερό (λ.χ. κατά μήκος της διαχωριστικής γραμμής - split line AB) ώστε το προκύπτον πλέγμα (δηλ. ο συνδυασμός ομόκεντρων κύκλων που δεν ισαπέχουν και περιφερειακά ομοιόμορφα κατανεμημένων ακτίνων) να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.



Υπόδειξη Λύσης:

(α) Υποθέστε λ.χ. ότι

$$x(i,j) = \eta R \cos(\xi\phi)$$

$$y(i,j) = \eta R \sin(\xi\phi)$$

αφού προσέξετε τι θα συμβολίσετε με R και ϕ, βρείτε τις μερικές $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta \left(= R\sin(\xi\phi)\right)$, βρείτε τους συντελεστές $A\left(= R^2\right)$, Γ και B, τα $x_{\xi\xi}, x_{\eta\eta}, y_{\xi\xi}, y_{\eta\eta}(=0)$ και δείξτε ότι:

$$A x_{\xi\xi} - 2\mathrm{B} x_{\xi\eta} + \Gamma x_{\eta\eta} = -R^3 \eta \phi^2 \cos(\xi\phi) \neq 0 .$$

(β) Υποθέστε ότι

$$x(i,j) = R(\eta)\cos(\xi\phi)$$

$$y(i,j) = R(\eta)\sin(\xi\phi)$$

όπου πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $R(\eta)$ (ας μη μπερδευτεί με το προηγούμενο R !). Υπολογίστε x_ξ …(όπως πριν). Δείξτε ότι

$$Ax_{\xi\xi} - 2\mathrm{B}x_{\xi\eta} + \Gamma x_{\eta\eta} = -R_\eta^2 R + R^2 R_{\eta\eta} = 0$$

Ζητάμε νά'ναι μηδέν και συνεπώς πρέπει να λύσετε τη διαφορική εξίσωση. Η λύση είναι ¨κάτι¨ με e^{kn}, (μόνο;). Προσοχή να καταλάβετε τι ακριβώς μοιράζεται εκθετικά (είναι η ακτίνα R, το διάστημα dR).

<u>Άσκηση 2:</u>

Η μέθοδος των <u>Thomas-Middlecoff</u> (με τις παραδοχές κ.λ.π. που ξέρετε) καταλήγει να υπολογίζει τη συνάρτηση

$$\Phi = -\frac{y_\xi y_{\xi\xi} + x_\xi x_{\xi\xi}}{x_\xi^2 + y_\xi^2} \qquad (\Gamma\Delta.15)$$

κατά μήκος της πλεγματικής γραμμής $\eta = 1$ (ή βέβαια και της $\eta = \eta_{\max}$).
Δείξτε ότι αυτό ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$s_{\xi\xi} + \Phi s_\xi = 0 \qquad (*)$$

στη γραμμή $\eta = 1$. Δηλαδή, με το να χρησιμοποιούμε τη (ΓΔ.15) για να βρούμε το Φ σε κάθε κόμβο του ορίου αυτού ισοδυναμεί με το να κάνουμε μιά εκθετική προσαρμογή καμπύλης (curve-fit) μεταξύ των οριακών σημείων. Εξηγείστε το ¨εκθετική¨.

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

(α) Χρησιμοποιείστε ότι $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $S_\xi = \sqrt{x_{\xi j}^2 + y_\xi^2}$

(β) Δείτε ότι για Φ =σταθερό, ή εξίσωση $(*)$ έχει λύσεις ¨εκθετικής μορφής¨.

<u>Άσκηση 3:</u>

Στη μέθοδο των Thomas-Middlecoff οι παραδοχές (ΓΔ.11) και (ΓΔ.12) στο όριο $\eta = 1$, οδήγησαν στο να διατυπωθεί εκεί η σχέση (ΓΔ.15).
Αν (για οποιαδήποτε λόγο) ζητήσετε τη γωνία που σχηματίζει η εγκάρσια πλεγματική γραμμή στο όριο να μην είναι ορθή αλλά να έχει μια τυχαία τιμή θ, δείξτε ότι στο όριο $\eta = 1$, αντί της (ΓΔ.15) θα είχατε την εξίσωση

$$\Phi = -\frac{2(\sin\theta)_\xi}{\sin\theta} - \frac{\left[(x_\xi - y_\xi \cot\theta)x_{\xi\xi} + (y_\xi + x_\xi \cot\theta)y_{\xi\xi}\right]}{\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right)}$$

Προσοχή : Το θ μπορεί να αλλάζει από κόμβο σε κόμβο (είναι δηλαδή $\theta = \theta(\xi)$).

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

Αντί της (ΓΔ.12), γράψτε και αναπτύξτε τη σχέση

$$g_{12} = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = |r_\xi| \cdot |r_\eta| \cdot \cos\theta$$

<u>Άσκηση 4:</u>

Στη θεωρία δείξαμε (δεν περιέχεται στις σημειώσεις σας) ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ελλειπτικές μ.δ.ε. $\nabla^2 \xi^i = f^i$ για <u>προσαρμογή</u> δομημένου πλέγματος στη λύση. Ένας τρόπος είναι να ονομάσουμε

$$\frac{J^2}{g_{22}} f^1 \to P^1 \quad , \quad \frac{J^2}{g_{11}} f^2 \to P^2$$

και να προκύψει το σύστημα

$$g_{22}\left(x_{\xi\xi} + P^1 x_\xi\right) - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}\left(x_{\eta\eta} + P^2 x_\xi\right) = 0 \qquad \text{(το ίδιο και για το y)}$$

(α) Κάντε τις πράξεις για να βγει το παραπάνω σύστημα.

(β) Ασχοληθείτε με το μονοδιάστατο παράδειγμα του $x_{\xi\xi} + P^1 x_\xi$ και δείξτε ότι μοιάζει με το νόμο ισοκατανομής (Equidistribution Law, $wx' = 0$) αν $P^1 = \frac{w'}{w}$, άρα προτείνετε εκφράσεις για τα P^1 και P^2.

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

(β) $P^1 = \dfrac{\partial w_\xi / \partial \xi}{w_\xi} \qquad P^2 = \dfrac{\partial w_\eta / \partial \eta}{w_\eta}$

Προσέξτε ότι w_ξ είναι ο δείκτης <u>δεν</u> είναι παράγωγος!) και w_η είναι το αισθητήριο κατά η.

Άσκηση 5:

Δουλεύτε στη γένεση 3Δ δομημένων πλεγμάτων με $\nabla^2 \xi^i = f^i$, $i = 1,2,3$ όπου $(x, y, z) \to (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ή απλούστερα $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$. Σε μια από τις έξι έδρες, την $\zeta = 1$ θέλετε να ζητήσετε:

(α) ορθογωνιότητα της ($\zeta =$ μεταβλητό) γραμμής που φτάνει σε κάθε σημείο της έδρας
(β) συγκεκριμένη απόσταση (S) του πρωτου κόμβου από την έδρα.

Διατυπώστε σύστημα που να υλοποιεί τα παραπάνω. Ποιές ποσότητες θα υπολογίζει ένα τέτοιο σύστημα; Τι πρέπει να προσεχτεί στην επίλυσή του;

Υπόδειξη Λύσης:

Δείξτε ότι

$$\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z = 0$$

$$\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z = 0$$

$$x_\zeta^2 + \upsilon_\zeta^2 + z_\zeta^2 = S^2$$

Από το σύστημα θα υπολογίζονται τα $(x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta)$. Πρόσημα τέτοια ώστε $J \rangle 0$!!!

Άσκηση 6:

Δημιουργήστε ένα σύστημα μ.δ.ε. για γένεση 2-Δ οριόδετων δομημένων πλεγμάτων ζητώντας

$(g_{12})_\xi = 0$ και $(g_{12})_\eta = 0$

Δείξτε ότι το σύστημα αυτό θα είναι το

$$x_\xi x_{\xi\eta} + x_{\xi\xi} x_\eta + y_\xi y_{\xi\eta} + y_{\xi\xi} y_\eta = 0$$

$$x_\xi x_{\eta\eta} + x_{\xi\eta} x_\eta + y_\xi y_{\eta\eta} + y_{\xi\eta} y_\eta = 0$$

Σχολιάστε καλά και κακά στοιχεία του νέου συστήματος ως προς το γνωστό $\nabla^2 \xi^i = 0$.

Άσκηση 7:

Υπολογίστε τις τιμές των συμβόλων Christoffel Γ_{ij}^k για το επίπεδο πλέγμα με κυψέλες τετραγωνικής μορφής και πλευράς $\Delta x = \Delta y = 1$. Αν αυτό το (απλό) πλέγμα προέκυψε από τη λύση εξισώσεων Poisson

$$\nabla^2 \xi^i = f^i$$

δείξτε ότι προφανώς $f^1 = f^2 = 0$, εκμεταλλευόμενοι τις εκφράσεις για τα $\Gamma_{i\,j}^{k}$ που βρήκαμε.

Υπόδειξη Λύσης:

Συγκρίνετε τις εξισώσεις

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_m}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial x_m}{\partial \xi^\kappa} = 0$$

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_m}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + f^k \frac{\partial x_m}{\partial \xi^\kappa} = 0$$

και παρατητείστε ότι $f^k = -g^{ij} \Gamma_{ij}^{k}$. Κάνετε τις λίγες πράξεις που χρειάζεται.

Άσκηση 8:

(Δεν πρόκειται ακριβώς για άσκηση αλλά για βοήθημα κατανόησης της σχετικής θεωρίας). Κατανοήστε ότι για να δημιουργήσετε ένα δομημένο πλέγμα (ξ,η) πάνω σε μια επιφάνεια στο χώρο που σε κάθε σημείο της ξέρετε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$ και τη μέση καμπυλότητα μ πρέπει να λύσετε το σύστημα

$$L(x) = 2\mu N_x , \qquad L(y) = 2\mu N_y , \qquad L(z) = 2\mu N_z$$

με τον τελεστή

$$L(\cdot) = g_{22}(\cdot)_{\xi\xi} - 2g_{12}(\cdot)_{\xi\eta} + g_{11}(\cdot)_{\eta\eta} + J^2 f^1 (\cdot)_\xi + J^2 f^2 (\cdot)_\eta$$

όπου (N_x, N_y, N_z) είναι οι συνιστώσες του $\vec{N}$, και J η επιφανειακή Ιακωβιανή ορίζουσα, με

$$-J^2 f^1 = g_{22}\Gamma_{11}^1 - 2g_{12}\Gamma_{12}^1 + g_{11}\Gamma_{22}^1$$

$$-J^2 f^2 = g_{22}\Gamma_{11}^2 - 2g_{12}\Gamma_{12}^2 + g_{11}\Gamma_{22}^2$$

όπου Γ_{ij}^{k} είναι τα επιφανειακά σύμβολα Christoffel.

Υπόδειξη Λύσης:

(α) Κατανοείστε ότι θεωρείτε το επιφανειακό πλέγμα που δημιουργείτε ως μιά πλεγματική επιφάνεια ζ=σταθερό, ενός τριδιάστατου εικονικού πλέγματος (ξ,η,ζ).

(β) Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να ξεχάσετε ότι τα $\Gamma_{i\,j}^{k}$ που βλέπετε είναι τα Christoffel symbols και να τα θεωρήσετε ως Όρους Πηγής που θα τους χειριστείτε όπως στο ¨Επίπεδο 2-Δ¨ πρόβλημα (Thoman-Middlecoff, Sorenson κλπ).

(γ) Το ερώτημα (β) ισοδυναμεί με το να ζητάτε να ισχύει

$$\text{[BELTRAMI OPERATOR]}\left(\xi^{i}\right)=-g^{\kappa\lambda}\Gamma_{\kappa\lambda}^{i}$$

όπου πάλι τα $\Gamma_{\kappa\lambda}^{i}$ είναι όροι πηγής. Αν προτιμάτε, αρχίστε να τα γράφετε ως $P_{\kappa\lambda}^{i}$ αντί $\Gamma_{\kappa\lambda}^{i}$!!!

(δ) Τι θα χρειαζόσασταν για να υλοποιήσετε τα παραπάνω σε κώδικα υπολογιστή; Καταλάβετε το διάγραμμα ροής ενός τέτοιου προβλήματος.

Άσκηση 9:

Δημιουργείστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Χωρίστε κάθε πλευρά του σε τρία ισαπέχοντα τμήματα, ώστε ουσιαστικά να έχετε ένα περίγραμμα από 9 κόμβους, που ο καθένας απέχει απόσταση ίση με τη μονάδα από τον προηγούμενο και τον επόμενο. Με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου σχηματίστε τη μορφή του μη-δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων στο σχήμα αυτό. Καταλάβετε γιατί το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη σειρά που σαρώνουμε το μέτωπο.

Άσκηση 10:

Αν προγραμματίζατε τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου για 3-Δ πλέγματα θα χρειζόσασταν μιά υπορουτίνα που να ελέγχει αν το τρίγωνο 123 τέμνεται με το ευθύγραμμο τμήμα 45 (κάντε ένα σχετικό σχήμα). Με ποιο αλγόριθμο θα το κάνετε ;

Υπόδειξη Λύσης:

Αν $\vec{g}_1=\vec{12},\vec{g}_2=\vec{13},\vec{g}_4=\vec{45}$, δημιουργείστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix}(x_2-x_1) & (x_3-x_1) & (x_4-x_4)\\ (y_2-y_1) & (y_3-y_1) & (y_4-y_5)\\ (z_2-z_1) & (z_3-z_1) & (z_4-z_5)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta^1\\ \beta^2\\ \beta^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4-x_1\\ y_4-y_1\\ z_4-z_1\end{bmatrix}$$

επεκτείνοντας ότι μάθατε για την εύρεση της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Πότε το παραπάνω σύστημα ¨δεν λύνεται¨; Τι θα ζητήσετε από τα β^i για τομή ή όχι-τομή; (Προσέξτε τα AND ή OR στις σχέσεις σας!!!).

Άσκηση 11:

Σκεφτείτε την υλοποίηση σε κώδικα της προσαρμογής μη-δομημένου πλέγματος στη λύση με ¨Προσομοίωση Ελατηρίων¨. Έστω i ο εκάστοτε κεντρικός κόμβος (κάθε κόμβος με τη σειρά του γίνεται ¨κεντρικός¨ σε μιά ρητή μέθοδο) και κ (κ=1,Κ) οι κόμβοι γείτονες του (φτιάξτε ένα σχήμα). Η αλλαγή της θέσης του i-κόμβου θα διέπεται από την εξίσωση

$$\vec{r}_i^{\,new} = \vec{r}_i^{\,old} + \omega \frac{\sum_{k=1}^{K} C_{ik}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_k\right)}{\sum_{k=1}^{K} C_{ik}}$$

όπου ω είναι ένας συντελεστής χαλάρωσης και

$$C_{ik} = k_1 + k_2 \frac{\left|f_i - f_k\right|}{\left|f_i + f_k\right|}$$

με f τη φυσική ποσότητα, λ.χ. πίεση, που κανονίζει την προσαρμογή και $k_1, k_2 =$ σταθερές.

(α) Εξηγείστε πως καταλαβαίνετε το προτεινόμενο σχήμα

(β) Ποιός ο ρόλος των k_1, k_2.

<u>Άσκηση 12:</u>

Δείξτε ότι σε κάθε 2-Δ (επίπεδο, i=1,2) ή 3-Δ (i=1,2,3) δομημένο πλέγμα ισχύει ότι

$$\nabla^2 \xi^i = -g^{jk}\Gamma^i_{jk}$$

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

Αναπτύξτε και βρείτε ότι

$$\nabla^2 \xi^i = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(J g^{ai}\right) = \frac{\partial g^{ai}}{\partial \xi^a} + \frac{g^{ai}}{J}\frac{\partial J}{\partial \xi^\alpha}$$

Χρησιμοποιείστε-αποδείξτε-(γενικεύστε σχέσεις που μάθατε για επιφανειακά πλέγματα) όπως οι

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi^k} = -g^{aj}\Gamma^i_{ak} - g^{ai}\Gamma^j_{ak} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial J}{\partial \xi^i} = J\Gamma^j_{ji}$$

αντικαταστείστε (προσέχοντας τους δείκτες) και προκύπτει το ζητούμενο.

<u>Άσκηση 13:</u>

Δείξτε ότι σε ένα 3-Δ ορθογώνιο δομημένο πλέγμα ισχύει ότι

$$\nabla^2 \xi = \left(g_{11} g_{22} g_{33}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{g_{22} g_{33} / g_{11}}\right)$$

$$\nabla^2 \eta = \left(g_{11} g_{22} g_{33}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g_{11} g_{33} / g_{22}}\right)$$

$$\nabla^2 \zeta = \left(g_{11} g_{22} g_{33}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\sqrt{g_{11} g_{22} / g_{33}}\right)$$

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

Χρησιμοποιείστε :

(α) ότι $\nabla^2 \xi^i = -g^{ik} \Gamma^i_{jk}$ (προηγούμενη άσκηση)

(β) εκφράσεις της μορφής $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k}\right)$

(γ) χρησιμοποιείστε $g^{ij} = 0$ για $i \neq j$ (ορθογωνιότητα) στις προηγούμενες εκφράσεις.

<u>Άσκηση 14:</u>

Δείξτε ότι σε ένα 2-Δ επίπεδο δομημένο πλέγμα ισχύουν οι εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi_x \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\xi_y \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_x \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta_y \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\right) = 0$$

<u>Υπόδειξη Λύσης:</u>

Γράψτε την προηγούμενη άσκηση για 2-Δ πλέγματα (λ.χ. με $g_{33} = 1, \frac{\partial}{\partial \zeta} = 0$) και αναπτύξτε.

<u>Άσκηση 15:</u>

Ότι ακολουθεί δεν είναι ακριβώς άσκηση, αλλά βοηθά στην κατανόηση της θεωρίας Γένεσης Επιφανειακών Πλεγμάτων και ξεκαθαρίζει τις εξισώσεις που διαθέτουμε και το πως υλοποιούνται σε πρόγραμμα (αν κάποιος ξέρει ¨καλά¨ το 2-Δ πρόβλημα)

(α) Μαθαίνω να αποδεικνύω ότι

$$\nabla^2_S \xi^\delta = -g^{\alpha\beta} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \quad \text{με} \quad \nabla^2_S = \frac{1}{J_S} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J_S g^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)$$

(β) Κατανοώ το τι σημαίνουν οι εξισώσεις Gauss

$$\vec{r},_{ij} = \Gamma_{ij}^{k} \vec{g}_{k} + \Omega_{ij} \vec{N}$$

(γ) Πολλαπλασιάζω τις εξισώσεις Gauss με g^{ij} και δείχνω ότι

$$\nabla_S^2 \vec{r} = g^{ij} \vec{r}_{,ij} - g^{ij} \Gamma_{\iota\xi}^{\kappa} \vec{g}_k = 2\mu \vec{N}$$

(δ) Κατανοώ πως μπορώ να βρίσκω τα ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ μ και $\vec{N}$ όταν μου δίνουν μιά επιφάνεια, αναλυτικά, λ.χ. ως $F(x, y, z) = 0$ ή $z = f(x, y)$

(ε) Ο συνδυασμός (α) και (γ) μπορεί να γράφεται ως

$$g^{ij} \vec{r}_{,ij} - \left(\nabla_S^2 \xi^k\right) \vec{r}_{,k} = 2\mu \vec{\mathrm{N}}$$

οπότε αυτό, από τα 2-Δ θυμίζει ...

(στ) Αν επιβάλω όρους πηγής $P^{\delta}\left(\delta = 1{,}2\right)$ ώστε

$$\nabla_S^2 \xi^{\delta} = P^{\delta}$$

θα «βλέπω» την εξίσωση του (ε) ως

$$g^{ij} \vec{r}_{,ij} - P^k \vec{r}_{,k} = 2\mu \vec{\mathrm{N}}$$