ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

ΔΠΜΣ Υπολογιστική Μηχανική, ΕΜΠ
Τυπολόγιο για τη χρήση στις Εξετάσεις
Επιμέλεια: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ *

29 Αυγούστου 2018

ΔΟΜΗΜΕΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΟΡΙΟΔΕΤΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Συναλλοίωτη διανυσματική βάση (δ.β.): Σε κάθε σημείο του δομημένου πλέγματος στό επίπεδο (x, y), αυτή ορίζεται από τα διανύσματα βάσης

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = (x_\xi, y_\xi), \qquad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = (x_\eta, y_\eta)$$

Οι συναλλοίωτες (covariant) μετρικές δεύτερης τάξης ορίζονται ως

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$$

δηλαδή

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

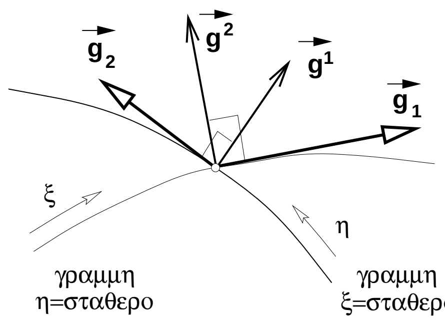
Το διάνυσμα $\vec{A}$ αναλύεται στη συναλλοίωτη δ.β. ως

$$\vec{A} = A^i \vec{g}_i$$

όπου A^i είναι οι ανταλλοίωτες συνιστώσες του. $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης κάθε σημείου.

Ανταλλοίωτη δ.β.: Ορίζεται από τα διανύσματα βάσης

$$\vec{g}^1 = \nabla \xi = (\xi_x, \xi_y), \qquad \vec{g}^2 = \nabla \eta = (\eta_x, \eta_y)$$



Οι ανταλλοίωτες (contravariant) μετρικές δεύτερης τάξης ορίζονται ως

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j$$

δηλαδή

$$g^{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad g^{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2, \quad g^{12} = g^{21} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y.$$

Το διάνυσμα $\vec{A}$ αναλύεται στην ανταλλοίωτη δ.β. ως

$$\vec{A} = A_i \vec{g}^i$$

όπου A_i είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες του.

Βασικές Σχέσεις: Είναι

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j$$

όπου δ_i^j είναι το σύμβολο του Kronecker. Από αυτήν προκύπτει ότι $A_i = \vec{A} \cdot \vec{g}_i$ και $A^i = \vec{A} \cdot \vec{g}^i$. Αν

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$, τότε

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{J}, \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J}$$

*Το τυπολόγιο αυτό αποτελεί το μοναδικό βοήθημα των σπουδαστών κατά την εξέτασή τους στη σχετική ύλη. Είναι πιθανό να υπάρχουν λάθη. Είναι ευθύνη του κάθε σπουδαστη να το ελέγξει με βάση το βιβλίο και τις σημειώσεις του. Ο διδάσκων παρακαλεί να του δοθούν οποιεσδήποτε διορθώσεις.

Αντίστοιχα,

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{J^2}, \quad g^{22}=\frac{g_{11}}{J^2}, \quad g^{12}=\frac{-g_{12}}{J^2}$$

Το στοιχειώδες μήκος τόξου είναι $ds^2=g_{ij}d\xi^i d\xi_j$. Διπλά επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση.

Διαφορικοί Τελεστές: Η κλίση βαθμωτής συνάρτησης Φ γράφεται ως

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}\vec{g}^i$$

Η απόκλιση διανυσματικής συν/σης $\vec{A}$ γράφεται

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{J}\frac{\partial(JA^i)}{\partial\xi^i}$$

Ο τελεστής Laplace εφαρμοζόμενος σε βαθμωτή συν/ση Φ δίνει

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(Jg^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^j}\right)$$

όπου $\xi^1\equiv\xi$, $\xi^2\equiv\eta$.

Παράγωγοι της συναλλοίωτης δ.β.: Είναι

$$\frac{\partial\vec{g}_i}{\partial\xi^j}=\Gamma^k_{ij}\vec{g}_k$$

όπου εμφανίζονται τα σύμβολα του Christoffel δεύτερου είδους, τα οποία ορίζονται ως

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}=\frac{1}{2}g^{mk}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial\xi^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial\xi^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\xi^m}\right)$$

Ελλειπτικές Μέθοδοι Γένεσης Οριόδετων Καμπυλόγραμμων Πλεγμάτων: Επιλύονται οι εξισώσεις

$$\nabla^2\xi^m=f^m$$

οι οποίες μετασχηματίζονται στο (ξ,η) ως εξής:

$$g^{ij}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\xi^i\partial\xi^j}+f^i\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^i}=0$$

Οι συναρτησεις f^m είναι οι μηχανισμοί ελέγχου της ποιότητας του πλέγματος. Για 2Δ πλέγματα, οι σχέσεις αναπτύσσονται ως:

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi}-2g_{12}x_{\xi\eta}+g_{11}x_{\eta\eta}+J^2f^1x_\xi+J^2f^2x_\eta &= 0\\ g_{22}y_{\xi\xi}-2g_{12}y_{\xi\eta}+g_{11}y_{\eta\eta}+J^2f^1y_\xi+J^2f^2y_\eta &= 0\end{aligned}$$

ΔΟΜΗΜΕΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΟΡΙΟΔΕΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή της Επιφάνειας: Σε κάθε σημείο επιφάνειας που περιγράφεται με την παραμετροποίηση (ξ,η), ορίζεται η πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας I ως

$$I=d\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

Είναι

$$I=Ed\xi^2+2Fd\xi d\eta+Gd\eta^2=g_{ij}d\xi^i d\xi^j$$

όπου

$$\begin{aligned} E&=g_{11}=\vec{r}_\xi\cdot\vec{r}_\xi\\ F&=g_{12}=g_{21}=\vec{r}_\xi\cdot\vec{r}_\eta\\ G&=g_{22}=\vec{r}_\eta\cdot\vec{r}_\eta\end{aligned}$$

είναι οι πρώτοι θεμελιώδεις συντελεστές της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Η ποσότητα I είναι αναλλοίωτη, άρα ανεξάρτητη της εκάστοτε παραμετροποίησης (ξ,η), αλλά οι πρώτοι θεμελιώδεις συντελεστές (ή συναλλοίωτες μετρικές δεύτερης τάξης) εξαρτώνται από την παραμετροποίηση. Συναρτήσει αυτών εκφράζεται η επιφανειακή Ιακωβιανή ως

$$J_s=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

Κάθετο Μοναδιαίο Διάνυσμα Επιφάνειας: Σε κάθε σημείο επιφάνειας με παραμετροποίηση (ξ,η), ορίζεται το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{N}=\frac{\vec{r}_\xi\times\vec{r}_\eta}{|\vec{r}_\xi\times\vec{r}_\eta|}$$

✎ **Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή της Επιφάνειας:** Σε κάθε σημείο επιφάνειας που περιγράφεται με την παραμετροποίηση (ξ,η), ορίζεται η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας II ως

$$II = -d\overrightarrow{r}\cdot d\overrightarrow{N} = d^2\overrightarrow{r}\cdot d\overrightarrow{N}$$

Είναι

$$II = Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2 = \Omega_{ij}d\xi^i d\xi^j$$

όπου

$$\begin{aligned}
L &= \Omega_{11} = -\overrightarrow{r}_{\xi}\cdot\overrightarrow{N}_{\xi} = \overrightarrow{r}_{\xi\xi}\cdot\overrightarrow{N}\\
M &= \Omega_{12} = \Omega_{21} = \frac{-1}{2}\left(\overrightarrow{r}_{\xi}\cdot\overrightarrow{N}_{\eta} + \overrightarrow{r}_{\eta}\cdot\overrightarrow{N}_{\xi}\right) = \overrightarrow{r}_{\xi\eta}\cdot\overrightarrow{N}\\
N &= \Omega_{22} = -\overrightarrow{r}_{\eta}\cdot\overrightarrow{N}_{\eta} = \overrightarrow{r}_{\eta\eta}\cdot\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

είναι οι δεύτεροι θεμελιώδεις συντελεστές της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Η ποσότητα II είναι αναλλοίωτη, άρα ανεξάρτητη της εκάστοτε παραμετροποίησης (ξ,η), αλλά οι δεύτεροι θεμελιώδεις συντελεστές εξαρτώνται από την παραμετροποίηση.

✎ **Καμπυλότητες:** Αν C είναι καμπύλη επί επιφανείας S παραμετροποιημένης με (ξ,η), το διάνυσμα της κάθετης καμπυλότητας (normal curvature vector) $\overrightarrow{k}_n$ στη C, σε ένα σημείο της P, ισούται με

$$\overrightarrow{k}_n = (\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{N})\overrightarrow{N}$$

όπου $\overrightarrow{k}$ το διάνυσμα της καμπυλότητας της C στο P.

Η κάθετη καμπυλότητα (normal curvature) κ_n ορίζεται ως

$$\kappa_n = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{N} = \frac{II}{I}$$

και ως πηλίκο αναλλίωτων ποσοτήτων είναι και αυτή αναλλοίωτη.

Όλες οι καμπύλες της επιφάνειας S που διέρχονται από το P και, εκεί, εφάπτονται στην ίδια ευθεία έχουν την ίδια τιμή κάθετης καμπυλότητας.

Κάθετη τομή (normal section) επιφάνειας στο P είναι κάθε καμπύλη της S η οποία προκύπτει από την τομή της με ένα επίπεδο που εμπεριέχει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$ στο P.

Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της S στο P ισούται με την κάθετη καμπυλότητα στο P, η οποία είναι αναλλοίωτη, για την υπόψη τομή.

Πρωτεύουσες κατευθύνσεις (principal directions) είναι οι κατευθύνσεις $d\xi : d\eta$ στο P στις οποίες το κ_n γίνεται μέγιστο και ελάχιστο. Οι αντίστοιχες κάθετες καμπυλότητες λέγονται πρωτεύουσες καμπυλότητες (principal curvatures). Οι πρωτεύουσες καμπυλότητες κ (έστω κ_1 και κ_2) είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\left(EG-F^2\right)\kappa^2 - (EN+GL-2FM)\kappa + \left(LN-M^2\right) = 0$$

Η μέση καμπυλότητα (mean curvature) μ σε ένα σημείο P επιφάνειας S ισούται με το ημιάθροισμα των τοπικών πρωτευουσών καμπυλοτήτων,

$$\mu = \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = \frac{1}{2}g^{ij}\Omega_{ij}$$

όπου οι ανταλλοίωτες μετρικές δεύτερης τάξης σχετίζονται με τις συναλλοίωτες με τις σχέσεις

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{J_s^2}, \qquad g^{12} = -\frac{g_{12}}{J_s^2}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{J_s^2}$$

ενώ

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$$

Η καμπυλότητα Gauss (Gaussian curvature) K σε ένα σημείο P επιφάνειας S ισούται με το γινόμενο των τοπικών πρωτευουσών καμπυλοτήτων,

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\Omega_{11}\Omega_{22}-\Omega_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

Σε κάθε σημείο επιφάνειας, η μέση καμπυλότητα και η καμπυλότητα Gauss είναι και οι δύο αναλλοίωτες ποσότητες.

✎ **Εξισώσεις Gauss-Weingarten:** Εξισώσεις Gauss:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_{\xi\xi} &= \Gamma_{11}^1\overrightarrow{r}_{\xi} + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{r}_{\eta} + \Omega_{11}\overrightarrow{N}\\
\overrightarrow{r}_{\xi\eta} &= \Gamma_{12}^1\overrightarrow{r}_{\xi} + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{r}_{\eta} + \Omega_{12}\overrightarrow{N}\\
\overrightarrow{r}_{\eta\eta} &= \Gamma_{22}^1\overrightarrow{r}_{\xi} + \Gamma_{22}^2\overrightarrow{r}_{\eta} + \Omega_{22}\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

ή

$$\overrightarrow{r}_{,ij} = \Gamma_{ij}^k\overrightarrow{r}_{,k} + \Omega_{ij}\overrightarrow{N}$$

όπου τα Γ_{ij}^{k} είναι τα επιφανειακά σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους). Αναλυτικά, είναι:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \frac{GE_{\xi}-2FF_{\xi}+FE_{\eta}}{2(EG-F^{2})}\\
\Gamma_{11}^{2} &= \frac{2EF_{\xi}-EE_{\eta}+FE_{\xi}}{2(EG-F^{2})}\\
\Gamma_{12}^{1} &= \frac{GE_{\eta}-FG_{\xi}}{2(EG-F^{2})}\\
\Gamma_{12}^{2} &= \frac{EG_{\xi}-FE_{\eta}}{2(EG-F^{2})}\\
\Gamma_{22}^{1} &= \frac{2GF_{\eta}-GG_{\xi}+FG_{\eta}}{2(EG-F^{2})}\\
\Gamma_{22}^{2} &= \frac{EG_{\eta}-2FF_{\eta}+FG_{\xi}}{2(EG-F^{2})}
\end{aligned}$$

ή

$$\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}=\frac{1}{2}g^{mk}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial \xi^{j}}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^{m}}\right)$$

Εξισώσεις Weingarten:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}_{\xi} &= \beta_{1}^{1}\overrightarrow{r}_{\xi}+\beta_{1}^{2}\overrightarrow{r}_{\eta}\\
\overrightarrow{N}_{\eta} &= \beta_{2}^{1}\overrightarrow{r}_{\xi}+\beta_{2}^{2}\overrightarrow{r}_{\eta}
\end{aligned}$$

ή

$$\overrightarrow{N}_{,i}=\beta_{i}^{j}\overrightarrow{r}_{,j}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\beta_{1}^{1} &= \frac{MF-LG}{EG-F^{2}}\\
\beta_{1}^{2} &= \frac{LF-ME}{EG-F^{2}}\\
\beta_{2}^{1} &= \frac{NF-MG}{EG-F^{2}}\\
\beta_{2}^{2} &= \frac{MF-NE}{EG-F^{2}}
\end{aligned}$$

Από συστολή (contraction) των εξισώσεων Gauss με τα g^{ij} προκύπτει ότι

$$g^{ij}\overrightarrow{r}_{,ij}-g^{ij}\Gamma_{ij}^{k}\overrightarrow{r}_{,k}=g^{ij}\Omega_{ij}\overrightarrow{N}=2\mu\overrightarrow{N}$$

✎ **Χρήσιμες Σχέσεις:** Αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{i\delta}}{\partial \xi^{k}} &= -g^{\alpha\delta}\Gamma_{\alpha\kappa}^{i}-g^{\alpha i}\Gamma_{\alpha\kappa}^{\delta}\\
\frac{\partial J_{s}}{\partial \xi^{i}} &= J_{s}\Gamma_{ji}^{j}
\end{aligned}$$

✎ **Τελεστής Beltrami:** Ο τελεστής Beltrami ή επιφανειακός τελεστής Laplace είναι

$$\nabla_{s}^{2}()=\frac{1}{J_{s}}\frac{\partial}{\partial \xi^{i}}\left(J_{s}g^{ij}\frac{\partial()}{\partial \xi^{j}}\right)$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\nabla_{s}^{2}\xi^{m}=-g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{m}$$

✎ **Ελλειπτικές Μέθοδοι Γένεσης Οριόδετων Καμπυλόγραμμων Επιφανειακών Πλεγμάτων:** Επιβάλλοντας ότι

$$\nabla_{s}^{2}\xi^{m}=f^{m}$$

προκύπτει η

$$g^{ij}\overrightarrow{r}_{,ij}+f^{k}\overrightarrow{r}_{,k}=2\mu\overrightarrow{N}$$

ή

$$g^{ij}\frac{\partial^{2}\overrightarrow{r}}{\partial \xi^{i}\partial \xi^{j}}+f^{i}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \xi^{i}}=2\mu\overrightarrow{N}$$