ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

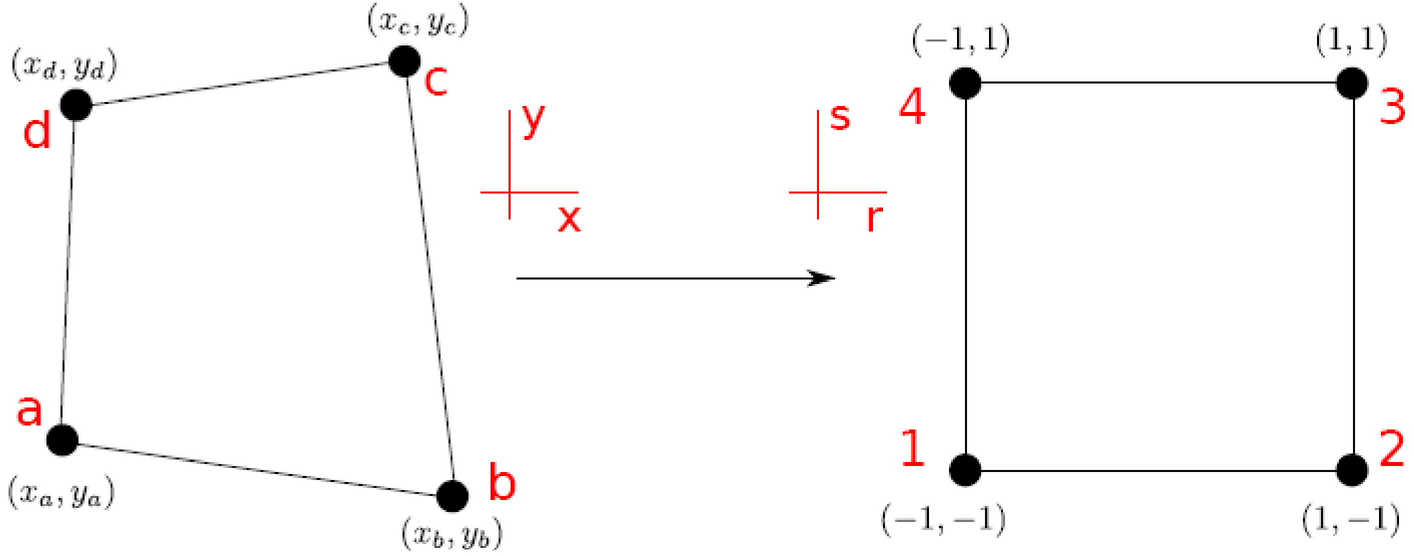
# ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ

**Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου**
Καθηγητής ΕΜΠ

kgianna@central.ntua.gr

http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/

# Διγραμμική Παρεμβολή σε 2Δ Υβριδικά Πλέγματα




**Μετασχηματισμός από τις Καρτεσιανές (x.y) στις τοπικές συντεταγμένες (r,s), σε ένα τετράπλευρο.**

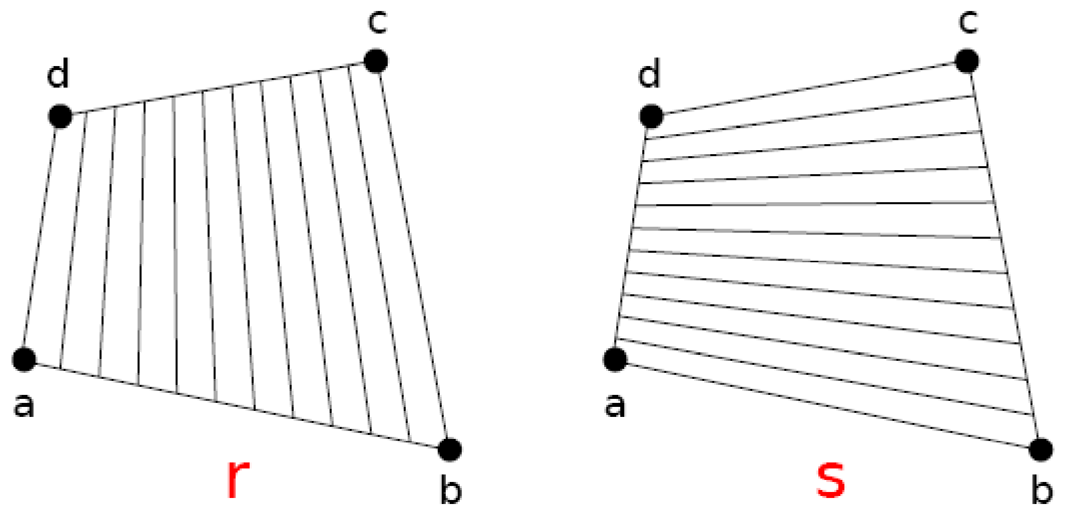
Η παρουσίαση αυτή βασίζεται σε υλικό από αντίστοιχο κεφάλαιο της Διδακτορικής Διατριβής του Δρ. Θ. Ζερβογιάννη, ΕΜΠ, 2011.

# Διγραμμική Παρεμβολή σε 2Δ Υβριδικά Πλέγματα

**Μετασχηματισμός από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x.y) στις τοπικές συντεταγμένες (r,s), σε ένα τετράπλευρο.**

$$U(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

**… οι προφανείς 4 εξισώσεις για τον υπολογισμό των 4 α.**

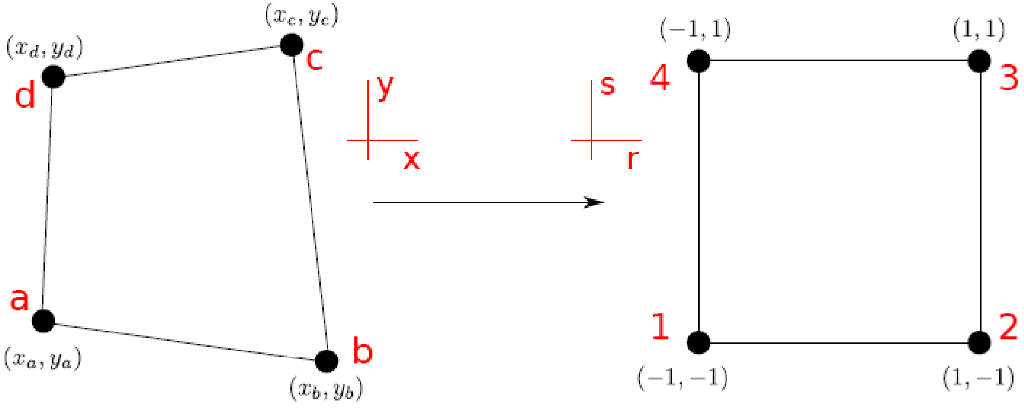



**Γραμμές ισο-r και ισο-s, μέσα στο τετράπλευρο.**

# Διγραμμική Παρεμβολή σε 2Δ Υβριδικά Πλέγματα

**Η ίδια παρεμβολή στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων – Ορισμός συναρτήσεων βάσης:**

$$U(r,s) = N_i(r,s)U_i$$




$$N_a = N_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_b = N_2(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_c = N_3(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_d = N_4(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

# Ισοπαραμετρικά Στοιχεία – Η Ιακωβιανή

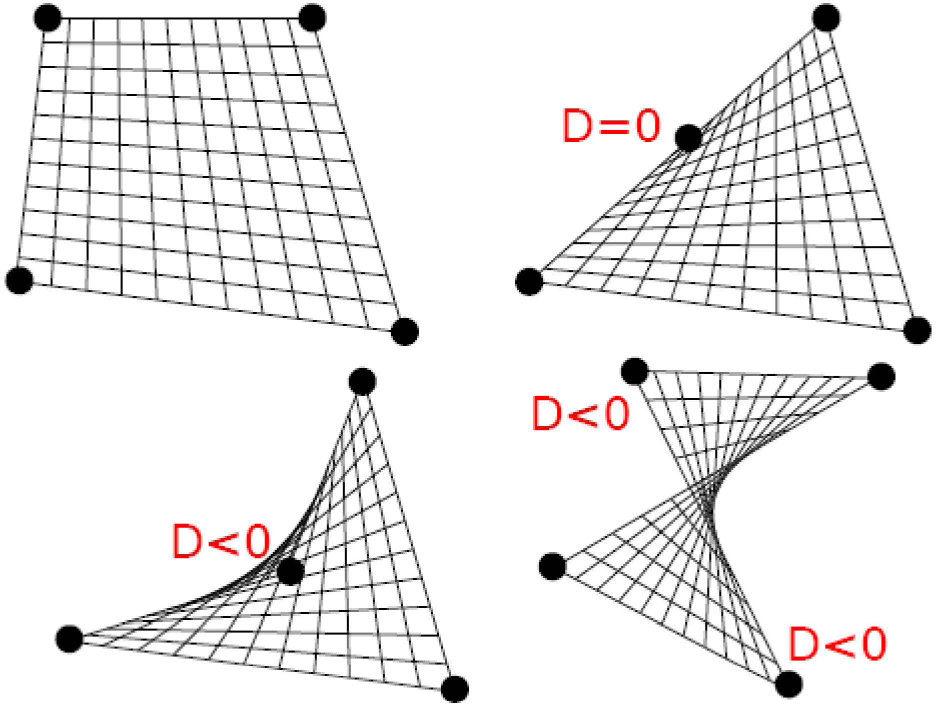
**Ισοπαραμετρικά Στοιχεία: Όταν οι Καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε εσωτερικού σημείου του στοιχείου (λ.χ. τετραέδρου) συσχετίζονται με τις κομβικές τιμές των συντεταγμένων με τις ίδιες σχέσεις που συνδέουν κάθε ροϊκό (λ.χ.) μέγεθος σε εσωτερικό σημείο με τις κομβικές τιμές του ίδιου ροϊκού μεγέθους. - ΙΔΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΑΣΗΣ**

**Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από (x,y) σε (r,s):**

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}$$

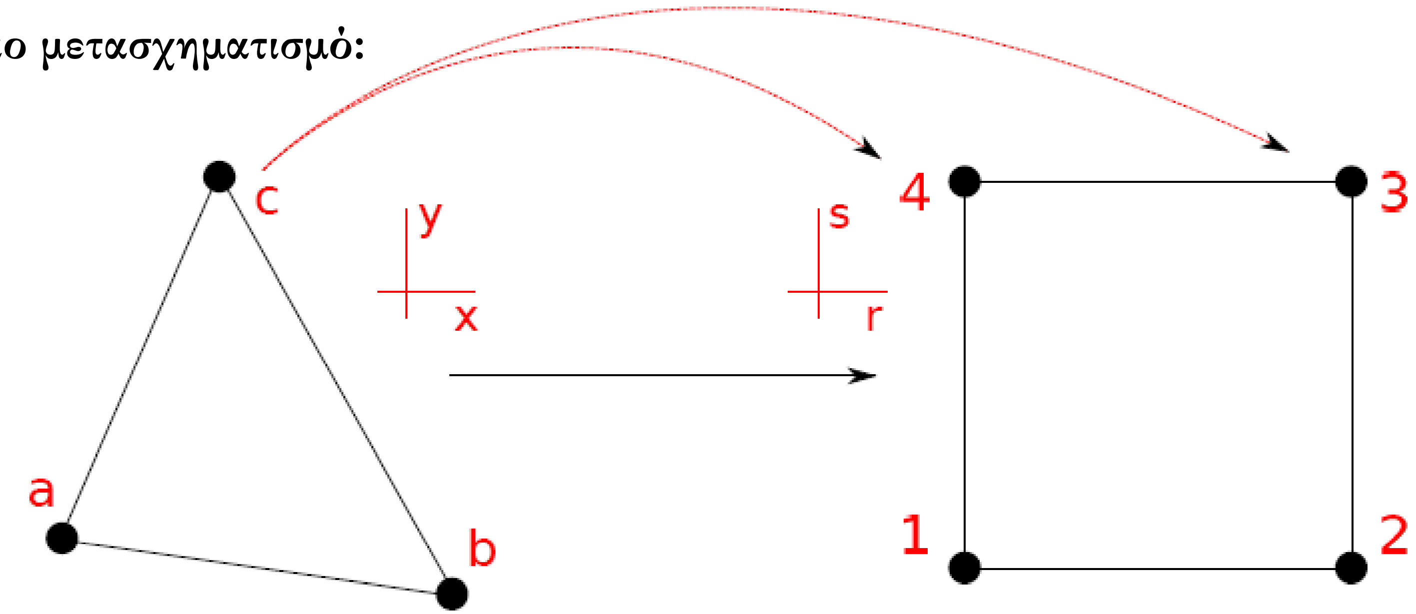
**Η Ιακωβιανή πρέπει να είναι ομόσημη σε όλη την επιφάνεια του τετραπλεύρου ώστε ο μετασχηματισμός από (x,y) σε (r,s) να είναι ένα-προς-ένα. Η κυρτότητα του τετραπλεύρου ελέγχεται μέσω του προσήμου της Ιακωβιανής στις 4 κορυφές κάθε τετραπλεύρου.**

# Έγκυρα & Μη-Έγκυρα Τετράπλευρα




Παράδειγμα έγκυρου τετραπλεύρου (άνω αριστερά) με τέσσερις ομόσημες κομβικές τιμές της ιακωβιανής ορίζουσας, και των περιπτώσεων μη–έγκυρων τετράπλευρων. Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις είναι δυνατόν να απαντηθούν σε ένα 2Δ πλέγμα.

**Με τον ίδιο μετασχηματισμό:**




$$N_a = N_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_b = N_2(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_c = N_3(r,s) + N_4(r,s) = \frac{1}{2}(1+s)$$

# Συναρτήσεις Βάσης σε Τρίγωνα

που γράφεται και:

$$U(x,y) = N_i(x,y)U_i$$

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_j - x_k$$

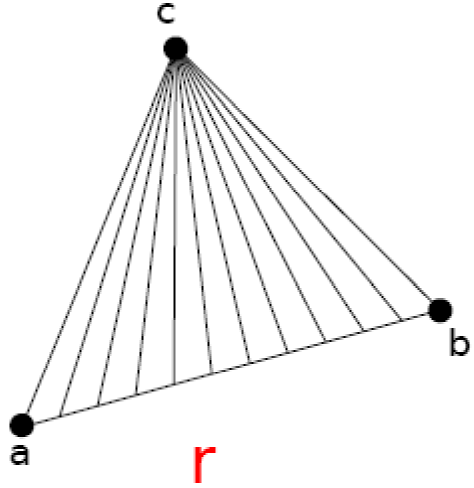
**A=εμβαδόν τριγώνου**

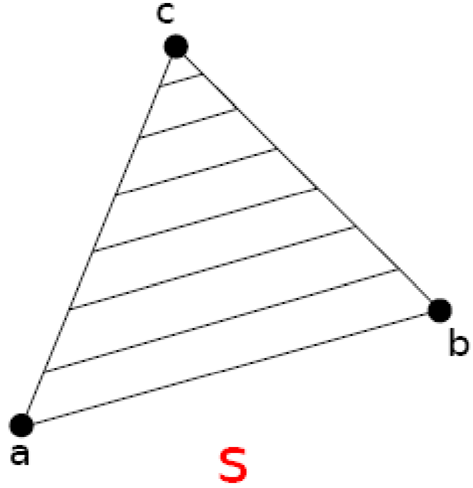
**(i,j,k)=θετική μετάθεση των κορυφών (1,2,3)**

**Υπολογισμός της σταθερής κλίσης του U στο εσωτερικό του τριγώνου (P1 elements)**

$$\nabla U = \vec{n}_i U_i$$

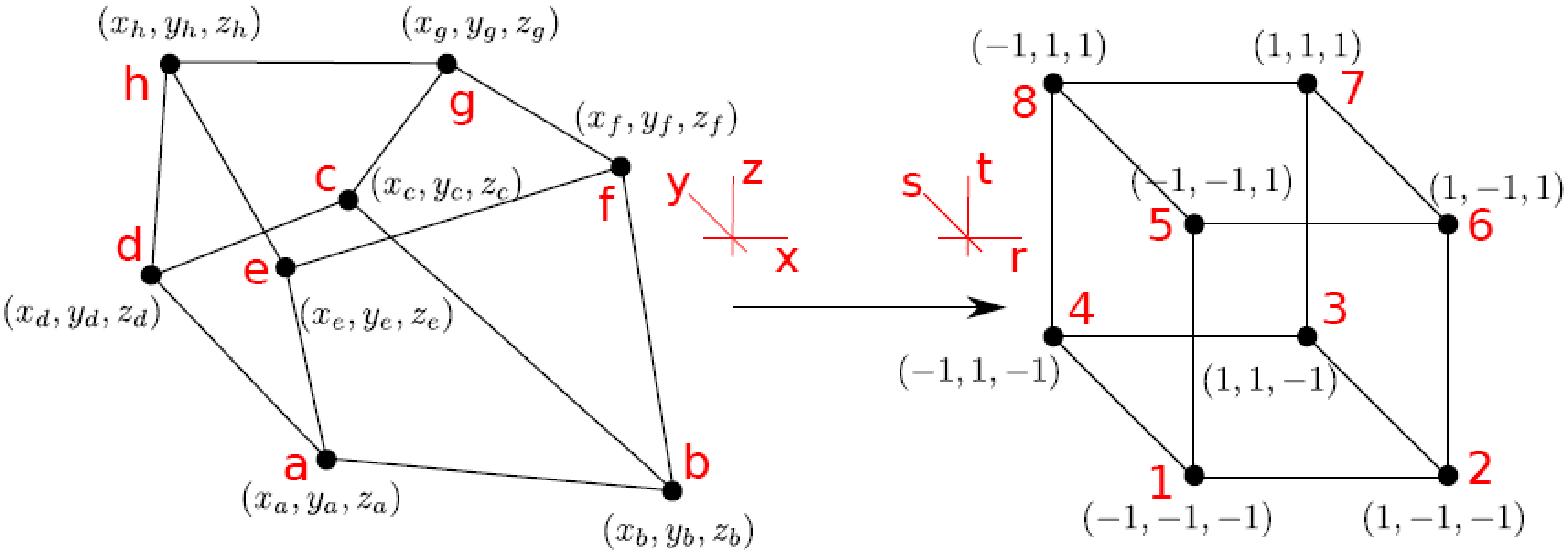
$$\vec{n}_i = (y_j - y_k, x_k - x_j)$$




**Γραμμές ισο-r και ισο-s, μέσα στο τρίγωνο**

# Τριγραμμική Παρεμβολή σε 3Δ Υβριδικά Πλέγματα




**Μετασχηματισμός από τις Καρτεσιανές (x.y,z) στις τοπικές συντεταγμένες (r,s,t), σε ένα τετράπλευρο.**

# Τριγραμμική Παρεμβολή σε 3Δ Υβριδικά Πλέγματα

$$U(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 yz + a_7 xz + a_8 xyz$$

**Μετασχηματισμός από τις Καρτεσιανές (x.y,z) στις τοπικές συντεταγμένες (r,s,t), σε ένα εξάεδρο.**

$$U(r,s,t) = N_i(r,s,t)U_i$$

$$N_i(r,s,t) = \frac{1}{8}\left(1 + rr_i\right)\left(1 + ss_i\right)\left(1 + tt_i\right)$$

# Τριγραμμική Παρεμβολή σε 3Δ Υβριδικά Πλέγματα

**Αναλυτικές Εκφράσεις:**

$$N_a = N_1(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$N_b = N_2(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_c = N_3(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$$

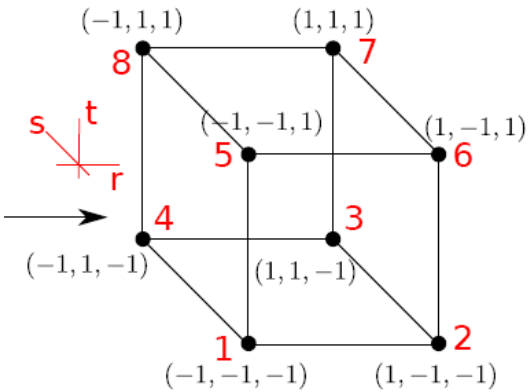
$$N_d = N_4(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$$

$$N_e = N_5(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$

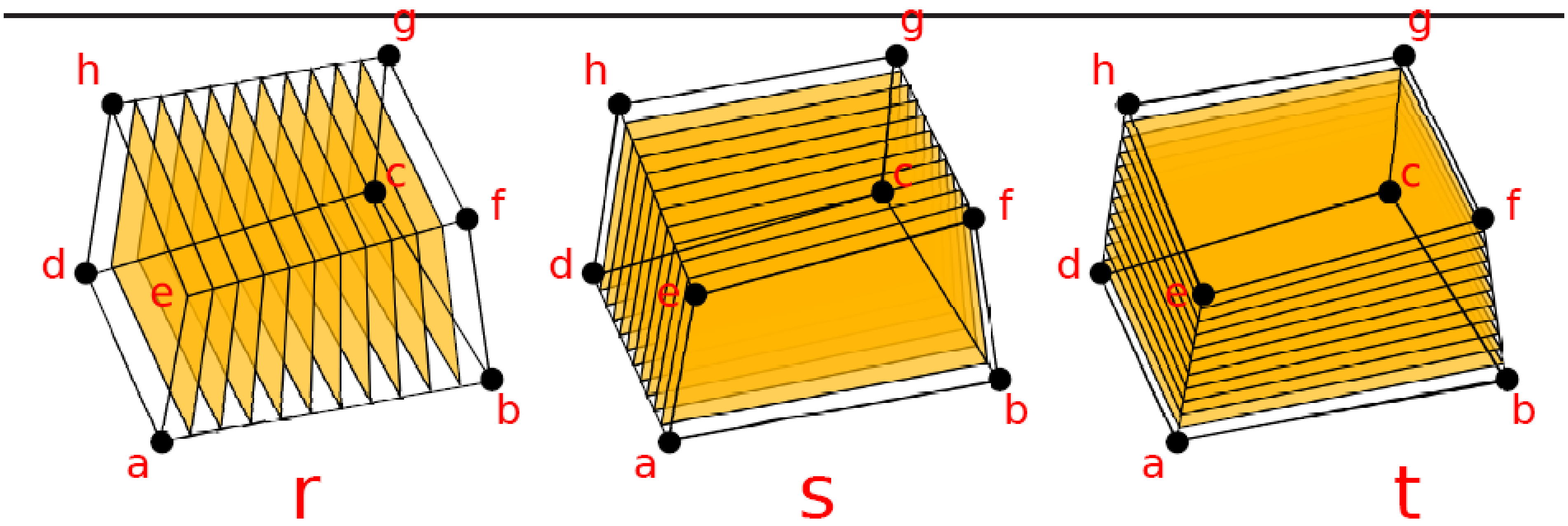
$$N_f = N_6(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$N_g = N_7(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$$

$$N_h = N_8(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$$



# Ισογραμμές (r,s,t) σε Εξάεδρο



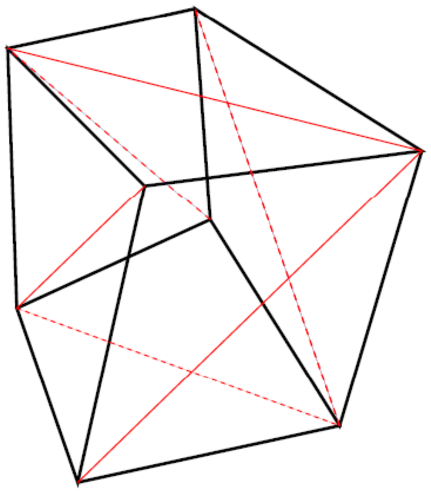

$$N_i(r,s,t) = \frac{1}{8}\left(1 + r r_i\right)\left(1 + s s_i\right)\left(1 + t t_i\right)$$

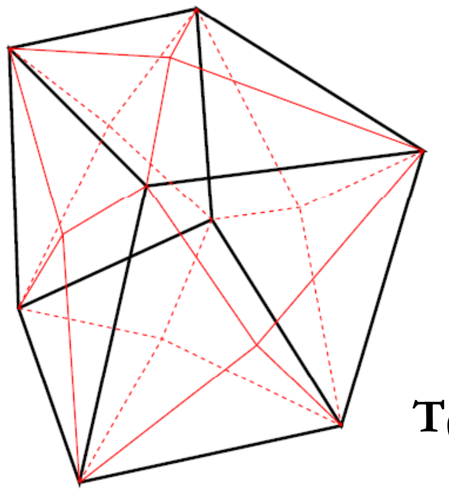
# Διατύπωση Τελεστών Ολοκλήρωσης σε Εξάεδρο

**Επειδή οι 4 κορυφές έδρας εξαέδρου δεν είναι αναγκαστικά συνεπίπεδες, υπάρχουν δύο τρόποι καθορισμού της επιφάνειας περιγράμματος:**

1. **Κάθε τετραπλευρική έδρα χωρίζεται σε δύο τρίγωνα (προσοχή: αυθαιρεσία – συμβατότητα).**
2. **Εισαγωγή νοητού κόμβου στο κέντρο βάρους των κορυφών κάθε τετραπλευρικής έδρας, χωρισμός της έδρας σε 4 τρίγωνα, χειρισμός του εξαέδρου ως τετράκις εξαέδρου.**
3. **Τριγραμμικές διεπιφάνειες, με τις προηγούμενες σχέσεις να εφαρμόζονται για τις οριακές τιμές των r, s, t.**

Τρόπος 1





Τρόπος 2

# Ισοπαραμετρικά Στοιχεία – Η Ιακωβιανή

**Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από (x,y,z) σε (r,s,t):**

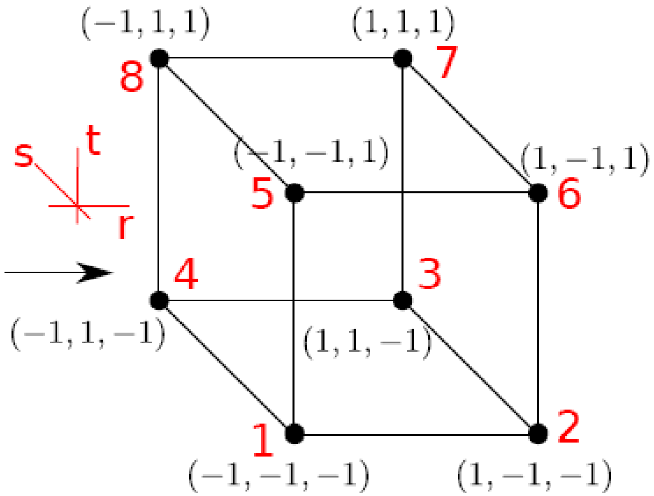
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix}$$

**Η Ιακωβιανή πρέπει να είναι ομόσημη σε όλη τον όγκο του εξαέδρου ώστε ο μετασχηματισμός από (x,y,z) σε (r,s,t) να είναι ένα-προς-ένα. Η κυρτότητα του τετραπλεύρου ελέγχεται μέσω του προσήμου της Ιακωβιανής στις 4 κορυφές κάθε τετραπλεύρου.**

# Η Ιακωβιανή – Ικανές αλλά όχι Αναγκαίες Συνθήκες

**Πρακτικός Κανόνας: Έλεγχος 32 Υποτετραέδρων – Να είναι θετικές οι:**

$$J_{1237},\ J_{2348},\ J_{3415},\ J_{4126},$$
$$J_{5837},\ J_{8762},\ J_{7651},\ J_{6584},$$
$$J_{2158},\ J_{4376},\ J_{1487},\ J_{3265},$$
$$J_{1235},\ J_{2346},\ J_{3417},\ J_{4128},$$
$$J_{5871},\ J_{8764},\ J_{7653},\ J_{6582},$$
$$J_{5146},\ J_{3782},\ J_{4853},\ J_{2671},$$
$$J_{1245},\ J_{2316},\ J_{3427},\ J_{4138},$$
$$J_{5861},\ J_{6572},\ J_{7683},\ J_{8754}$$




**όπου:**

$$J_{ijkl} = \vec{x}_{il} \cdot (\vec{x}_{ij} \times \vec{x}_{ik})$$

$$\vec{x}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$$

# Εύρεση Όγκου Εξαέδρου

**Υπολογίζεται αναλυτικά, ολοκληρώνοντας:**

$$\iiint_V dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} det(J)\,dr\,ds\,dt =$$

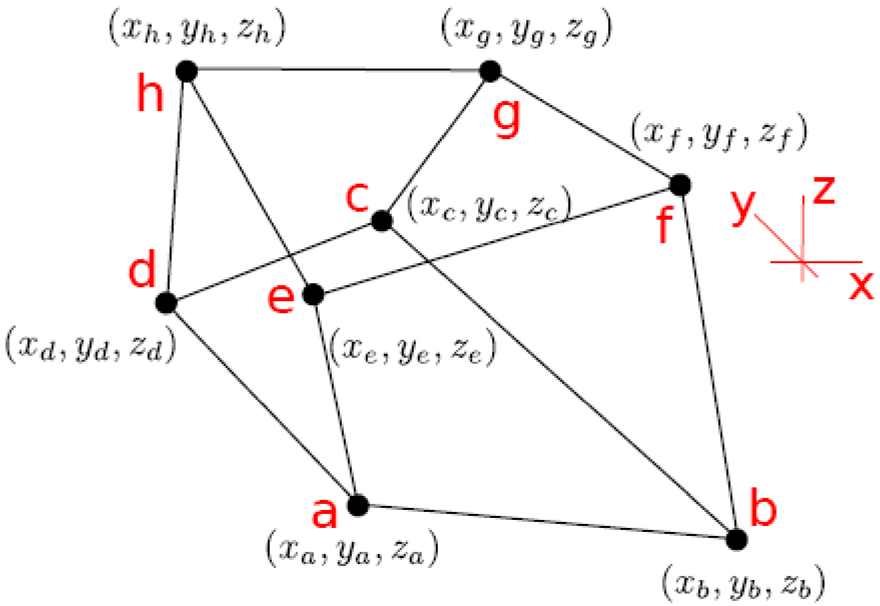
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{\partial N_i}{\partial r}\left(\frac{\partial N_j}{\partial s}\frac{\partial N_k}{\partial t} - \frac{\partial N_k}{\partial s}\frac{\partial N_j}{\partial t}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial N_j}{\partial r}\left(\frac{\partial N_k}{\partial s}\frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial s}\frac{\partial N_k}{\partial t}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial N_k}{\partial r}\left(\frac{\partial N_i}{\partial s}\frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_j}{\partial s}\frac{\partial N_i}{\partial t}\right)\right] x_i y_j z_k\,dr\,ds\,dt$$

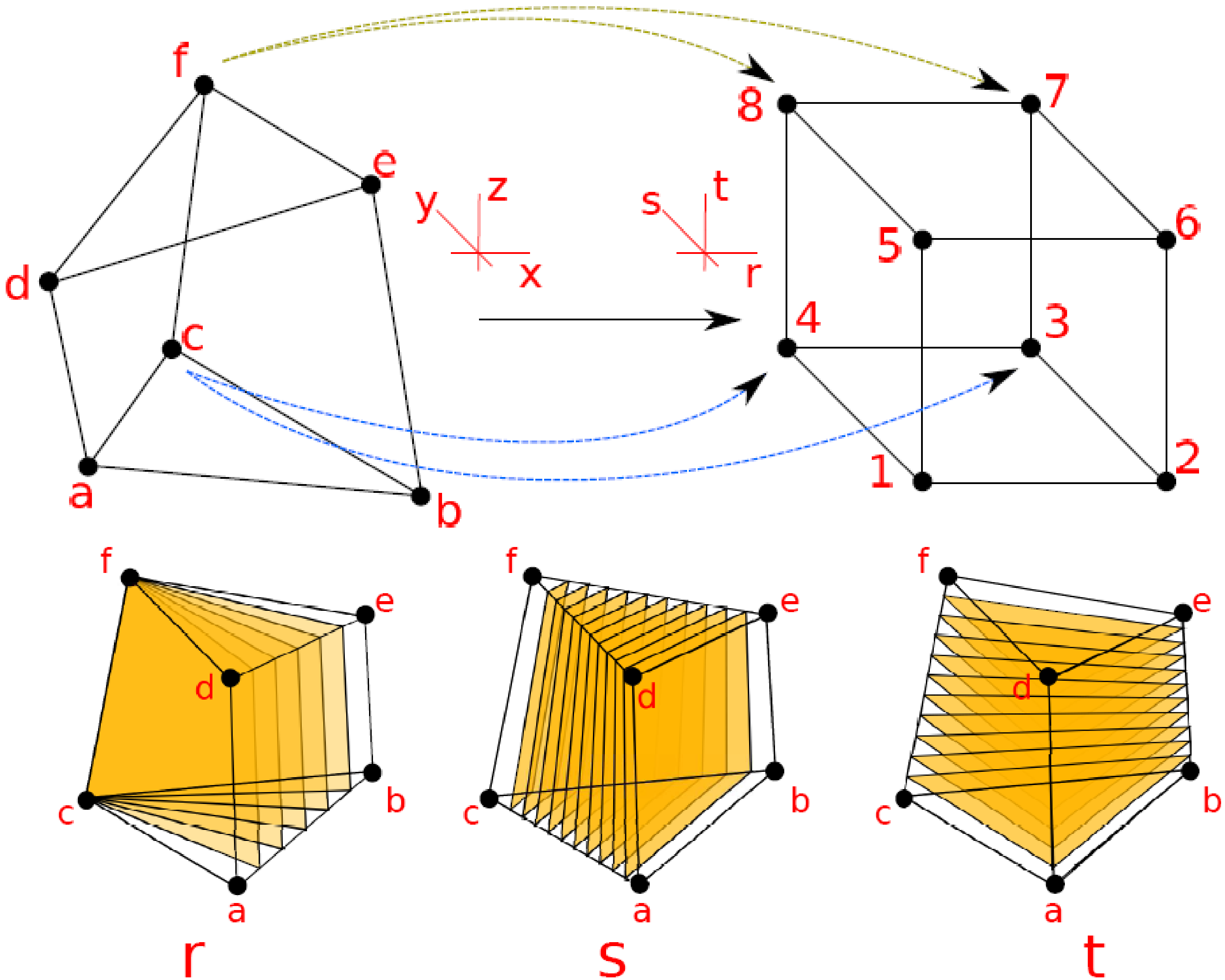
που δίνει ότι και ο τύπος του Grandy:

$$V = \frac{1}{12}\left([\vec{x}_g - \vec{x}_b + \vec{x}_h - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_d, \vec{x}_c - \vec{x}_a] + \right.$$
$$+ [\vec{x}_h - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_d + \vec{x}_f - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_e] +$$
$$\left. + [\vec{x}_g - \vec{x}_b, \vec{x}_f - \vec{x}_a, \vec{x}_g - \vec{x}_e + \vec{x}_c - \vec{x}_a]\right)$$




$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

# Πρίσματα Τριγωνικής Βάσης



# Πρίσματα Τριγωνικής Βάσης

$$N_a = N_1(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$N_b = N_2(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_c = N_3(r,s,t) + N_4(r,s,t) = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)$$

$$N_d = N_5(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$

$$N_e = N_6(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$N_f = N_7(r,s,t) + N_8(r,s,t) = \frac{1}{4}(1+s)(1+t)$$

# Πρίσματα Τριγωνικής Βάσης

**Έλεγχος προσήμου Ιακωβιανών:**

**- Δεν χρειάζεται να ελεγχθούν οι εκφυλισμένες-μηδενικές:**

$$J_{2348},\ J_{3415},\ J_{5837},\ J_{8762},$$
$$J_{4376},\ J_{1487},\ J_{2346},\ J_{3417},$$
$$J_{5871},\ J_{8764},\ J_{3782},\ J_{4853},$$
$$J_{3427},\ J_{4138},\ J_{7683},\ J_{8754}$$

**- Είναι ανά ζεύγη ίσες οι:**

$$J_{1237} = J_{4128}$$
$$J_{1235} = J_{1245}$$
$$J_{7653} = J_{6584}$$
$$J_{4126} = J_{2316}$$
$$J_{7165} = J_{5861}$$
$$J_{6582} = J_{6572}$$

**- Αρκεί να ελεγχθούν οι:**

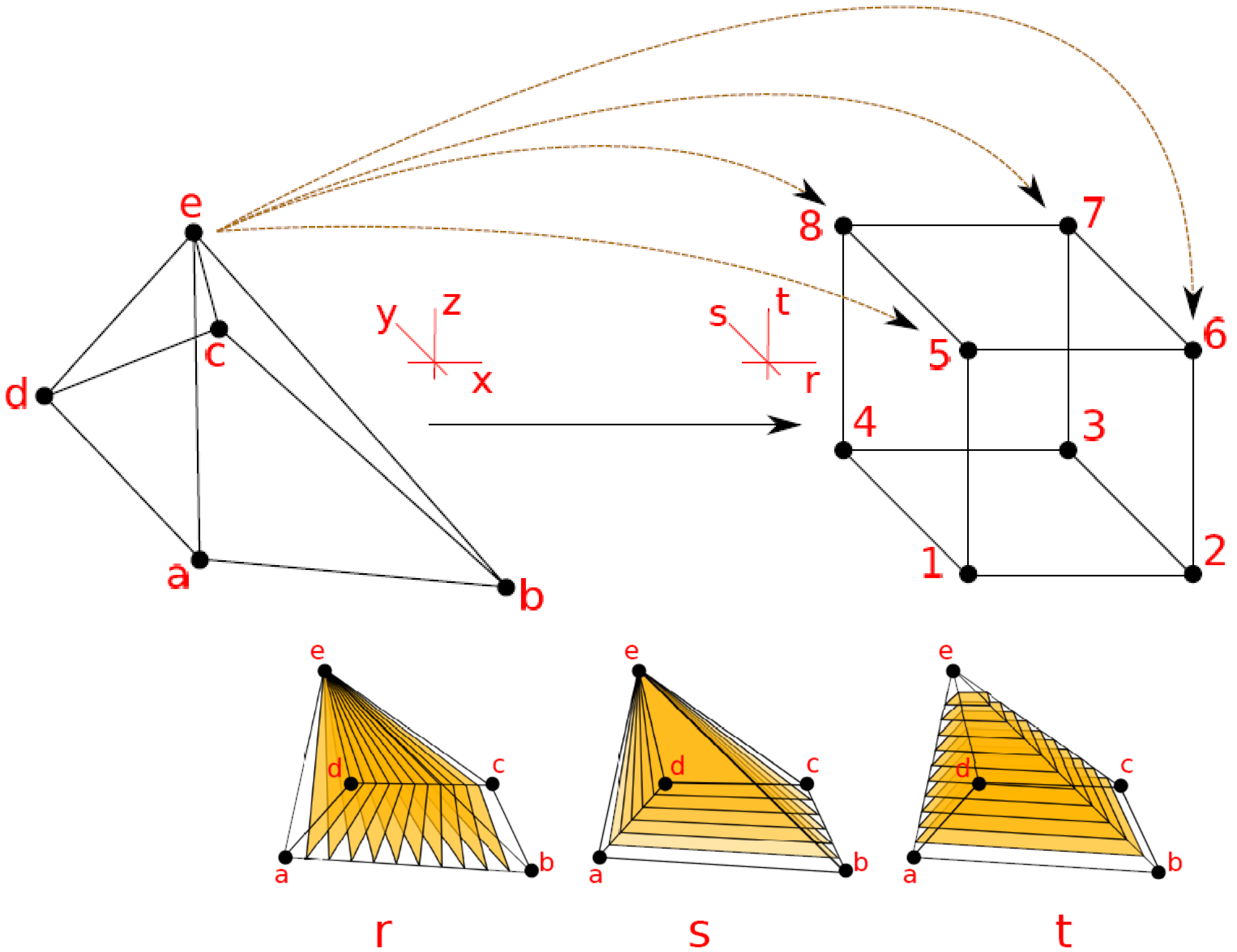
$$J_{1237},\ J_{1235},\ J_{7653},\ J_{4126},$$
$$J_{7165},\ J_{6582},\ J_{2158},\ J_{3265},$$
$$J_{5146},\ J_{2671}$$

# Πρίσματα Τριγωνικής Βάσης

**Όγκος Πρίσματος:**

$$V = \frac{1}{12}\left([\vec{x}_f - \vec{x}_c + \vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_c - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_b] + \right.$$
$$+ [\vec{x}_e - \vec{x}_c, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_a] +$$
$$\left. + [\vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_b]\right)$$

# Πρίσματα Τετραπλευρικής Βάσης



# Πρίσματα Τετραπλευρικής Βάσης

$$N_a = N_1(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$N_b = N_2(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_c = N_3(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$$

$$N_d = N_4(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$$

$$N_e = N_5(r,s,t) + N_6(r,s,t) + N_7(r,s,t) + N_8(r,s,t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

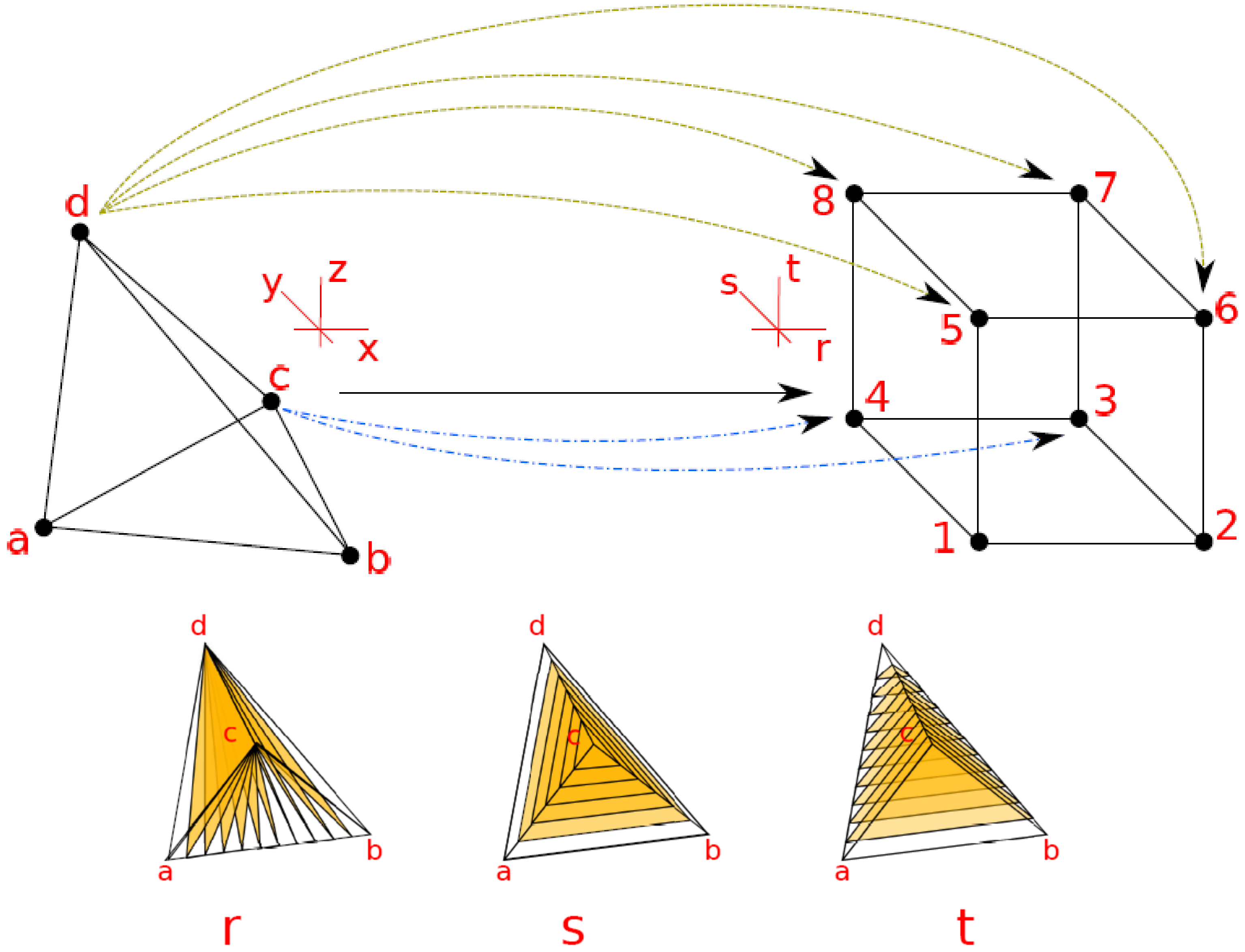
- **Αρκεί να ελεγχθούν (μόνο) οι:**

$$J_{1235}, \; J_{2345}, \; J_{3415}, \; J_{4125}$$

- **Όγκος:**

$$V = \frac{1}{12}\left([\vec{x}_f - \vec{x}_c + \vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_c - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_b] + \right.$$
$$\left. + [\vec{x}_e - \vec{x}_a, \vec{x}_f - \vec{x}_d, \vec{x}_f - \vec{x}_b]\right)$$

# Τετράεδρα



# Τετράεδρα

$$N_a = N_1(r,s,t) = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$N_b = N_2(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_c = N_3(r,s,t) + N_4(r,s,t) = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)$$

$$N_d = N_5(r,s,t) + N_6(r,s,t) + N_7(r,s,t) + N_8(r,s,t) = \frac{1}{2}(1+t)$$

$$U(x,y) = L_i(x,y)U_i$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

# Τετράεδρα

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \qquad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = -\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \qquad d_i = -\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

- **Όγκος:**

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$