ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Λέκτορας, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΡ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
(ή ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ)

ΠΡ.1 Γενικά

Στη δεκαετία του 1970, η αριθμητική γένεση συστημάτων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (curvilinear coordinates) προσαρμοσμένων στα όρια του χωρίου υπολογισμού έδωσε πολύ σημαντική ώθηση στη χρήση των πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων όγκων γιά την αριθμητική επίλυση φυσικών προβλημάτων που μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η ώθηση αυτή ήταν πολύ έντονη ειδικά στις περιπτώσεις όπου το πρόβλημα απαιτούσε τη λύση των εξισώσεων αυτών σε διδιάστατες ή τριδιάστατες περιοχές, των οποίων τα όρια παρουσίαζαν ακανόνιστη μορφή. Στη συνέχεια, θα αναφέρεται αποκλειστικά ο όρος «πεπερασμένες διαφορές», ο οποίος θα θεωρήσουμε ότι στη γενικότητά του περικλείει και την τεχνική των πεπερασμένων όγκων. Τα πλέγματα στα οποία εδώ αναφερόμαστε θα ονομάζονται Δομημένα Πλέγματα (Structured Grids or Structured Meshes), ώστε να τονίζεται η ύπαρξη δομής (structure) σε αυτά. Η δομή αυτή ουσιαστικά εκφράζεται από την υιοθέτηση ενός συστήματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (ΣΚΣ), το οποίο διευκολύνει την «κίνηση» («μέτρηση») πάνω στο, με οποιοδήποτε τρόπο δημιουργημένο πλέγμα. Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική, ή Μετάδοση Θερμότητας και ο Ηλεκτρομαγνητισμός είναι τρείς τομείς που μπορούμε πρόχειρα να αναφέρουμε ότι ωφελήθηκαν άμεσα από την ευρεία χρήση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων σε συνδυασμό με μεθοδολογίες πεπερασμένων διαφορών. Γενικά, η Δομική Ανάλυση Κατασκευών σχετίστηκε περισσότερο με τα μη-δομημένα πλέγματα και τη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων.

Παραδείγματα δομημένων πλεγμάτων σε πραγματικές περιπτώσεις από την επιστήμη της Υπολογιστικής Μηχανικής παρουσιάζονται στο Σχήμα ΠΡ.1. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες (x,y) ή (x,y,z) ή τανυστικά x_i (i=1,2 ή και 3) για το καρτεσιανό επίπεδο ή χώρο όπου δημιουργείται το διδιάστατο ή τριδιάστατο πλέγμα. Το δε ΣΚΣ με το οποίο παραμετροποιούμε το πλέγμα θα συμβολίζεται με (ξ,η) ή (ξ,η,ζ) ή τανυστικά ξ^i, (i=1,2 ή και 3). Δίπλα στην έννοια του ΚΣΣ, υπάρχει πάντα η έννοια του μετασχηματισμού (transformation) ή της απεικόνισης (mapping). Οι τελευταίες δύο ισοδύναμες έννοιες δηλώνουν ότι υπάρχει μια αντιστοίχηση ένα-προς-ένα ανάμεσα σε κάθε κόμβο του πλέγματος το χώρο x_i (θα λέγεται και φυσικός χώρος ή χωρίο) και ενός πολύ απλού πλέγματος με τετραγωνικές (γιά δύο διαστάσεις) ή κυβικές (γιά τρείς διαστάσεις) κυψέλες με μοναδιαία πλευρά στο χώρο ξ^i (θα λέγεται μετασχηματισμένος ή υπολογιστικός χώρος ή χωρίο). Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζεται στο Σχήμα ΠΡ.2. Αντίστοιχο σχήμα θα μπορούσε εύκολα να δοθεί γιά ένα τριδιάστατο χωρίο που μετασχηματίζεται από το καρτεσιανό (x,y,z) στο μετασχηματισμένο χωρίο (ξ,η,ζ). Πρέπει δε να γίνει σαφές ότι ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να λειτουργήσει άσχετα από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε το πλέγμα στο φυσικό χωρίο. Οι τρόποι γένεσης δομημένων αποτελούν το αντικείμενο επόμενων κεφαλαίων.

Η χρήση ΣΚΣ, όπου τα όρια του χωρίου ροής ταυτίζονται με πλεγματικές γραμμές, διευκολύνει τη χρήση της μεθοδολογίας πεπερασμένων διαφορών (και προφανώς και των πεπερασμένων όγκων), κυρίως λόγω της αρκετά εύκολης εφαρμογής των οριακών συνθηκών, χωρίς την ανάγκη ενσωμάτωσης σχημάτων αριθμητικής παρεμβολής. Ακόμα και γιά τη μελέτη της μή-μόνιμης ροής σε χωρίο με κινούμενα τοιχώματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κσσ και να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σε κάποιο αντίστοιχο πρόβλημα που θα λυθεί στο μετασχηματισμένο χωρίο που αποτελείται από τετραγωνικές (γιά δύο διαστάσεις) ή κυβικές (γιά τρείς διαστάσεις) κυψέλες με μοναδιαία πλευρά. Η εφαρμογή σχημάτων πεπερασμένων διαφορών σε συνδυσμό με καμπυλόγραμμες συντεταγμένες απαιτεί τα παρακάτω δύο βήματα:

- Μετασχηματισμό κάθε μερικής παραγώγου μιάς φυσικής ποσότητας, γραμμένης ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες, σε εκφράσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους της ίδιας ποσότητας ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες καθώς και παραγώγους των καρτεσιανών ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ή το ανάποδο, που όπως θα δούμε δεν έχει καμμία διαφορά). Οι τελευταίες παράγωγοι θα φέρονται με το γενικό όνομα «μετρικές» (metrics) και ουσιαστικά περικλείουν όλη την πληροφορία για το ΣΚΣ που χρησιμοποιήσαμε.
- Διακριτοποίηση των παραγώγων της φυσικής ποσότητας ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Η διακριτοποίηση γίνεται εύκολα με τη βοήθεια των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών πάνω στο ομοιόμορφο πλέγμα του μετασχηματισμένου χωρίου, όπου οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών κόμβων είναι μοναδιαίες. Με τον τρόπο αυτό, όλοι οι υπολογισμοί ανάγονται σε ένα απλουστευμένο και βολικό υπολογιστικό πλέγμα.

Γενικά η δημιουργία αριθμητικών (υπολογιστικών) πλεγμάτων είναι η διαδικασία με την οποία διατάσσεται, μέσα στο προς επίλυση χωρίο, ένας συγκεκριμένος αριθμός "παρατηρητών των φυσικών φαινομένων". Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις αποτελούν το μέσο επικοινωνίας μεταξύ των "παρατηρητών" αυτών, δηλαδή των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Ο αριθμός των "παρατηρητών" ή κόμβων πρέπει να είναι αρκετά υψηλός ώστε η συλλογή των πληροφοριών από το πεπερασμένο σύνολό τους να εξασφαλίζει την πρόβλεψη των φυσικών φαινομένων με ικανοποιητική ακρίβεια. Όμως, από την άλλη πλευρά, πλέγματα υπερβολικά μεγάλων διαστάσεων επιβαρύνουν σημαντικά το χρόνο υπολογισμού, όταν στα πλέγματα αυτά λύνονται προβλήματα με τις παραπάνω τεχνικές. Επίσης, ας ληφθεί υπόψη ότι η τελική ακρίβεια με την οποία προβλέπονται τα φυσικά φαινόμενα εξαρτάται και από τις παραδοχές του μοντέλου που εκφράζουν οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται.

ΠΡ.2 Θεμελιώδεις Σχέσεις σε ένα ΣΚΣ

Ας θεωρήσουμε ότι για το υπολογιστικό χωρίο που παρουσιάζει το Σχήμα ΠΡ.2 κατασκευάστηκε (με οποιοδήποτε τρόπο) ένα πλέγμα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Με το γεωμετρικό μετασχηματισμό που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο κόμβος Μ του πλέγματος στο φυσικό χωρίο απεικονίζεται στον κόμβο Μ' του μετασχηματισμένου χωρίου. Ας φανταστούμε στη συνέχεια ότι, αντί ενός διδιάστατου, έχουμε ένα τριδιάστατο χωρίο ροής, δηλαδή από τον κόμβο Μ διέρχονται καμπύλες πλεγματικές γραμμές από τρείς οικογένειες τέτοιων γραμμών : μιά γραμμή ξ=μεταβλητό, μιά γραμμή η=μεταβλητό και μιά τρίτη γραμμή ζ=μεταβλητό (θα αναφερόμαστε, για λόγους γενικότητας σε τριδιάστατα χωρία, αφού οι αντίστοιχες σχέσεις για τα διδιάστατα απορρέουν άμεσα). Για τίς τρείς αυτές γραμμές του πλέγματος μπορούμε να ορίσουμε τα εφαπτομενικά τους διανύσματα στον κόμβο Μ, τα οποία αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \qquad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \qquad \vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \qquad (\text{ΠΡ}.1)$$

Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δεν είναι αναγκαστικά μοναδιαία και αποτελούν τη λεγόμενη συναλλοίωτη (covariant) βάση διανυσμάτων γιά το σημείο Μ. Στη σχέση (ΠΡ.1), με $\vec{r}$ συμβολίσαμε το διάνυσμα θέσης του σημείου Μ.

Από το ίδιο σημείο Μ διέρχονται προφανώς τρείς επιφάνειες, η επιφάνεια ξ=σταθερό, η επιφάνεια η=σταθερό και η επιφάνεια ζ=σταθερό. Τα κάθετα σ'αυτές τις τρείς επιφάνειες στο σημείο Μ, μή-μοναδιαία διανύσματα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$\vec{g}^1 = \nabla \xi \qquad \vec{g}^2 = \nabla \eta \qquad \vec{g}^3 = \nabla \zeta \qquad (\text{ΠΡ}.2)$$

που είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και αποτελούν τη λεγόμενη ανταλλοίωτη (contravariant) διανυσματική βάση γιά το σημείο Μ.

Για την παρακάτω ανάλυση ο αναγνώστης καλείται να συνηθίσει στον τανυστικό συμβολισμό των δύο βάσεων ως

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \quad \kappa\alpha\iota \quad \vec{g}^i = \nabla \xi^i$$

όπου i=1,2,3 και τα (ξ^1,ξ^2,ξ^3) συμβολίζουν τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (ξ,η,ζ) αντίστοιχα. Στις παρακάτω σχέσεις ο κανόνας είναι ότι επαναλαμβανόμενος δείκτης (i,j κλπ) στο ίδιο μέλος μιάς σχέσης παριστά άθροιση γιά τις τιμές 1 και 2 για το διδιάστατο πρόβλημα ή για τις τιμές 1, 2 και 3 γιά το τριδιάστατο. Οταν δεν επιθυμείται η άθροιση θα δηλώνεται ρητά. Γιά την καλύτερη εποπτεία σχετικά με τις δύο διανυσματικές βάσεις παραθέτουμε το Σχήμα ΠΡ.3 όπου παριστάνονται συμβολικά οι δύο βάσεις στο σημείο Μ ενός διδιάστατου χωρίου.

Η συναλλοίωτη και η ανταλλοίωτη διανυσματική βάση είναι αντίστροφα συστήματα διανυσμάτων γιά τα οποία ισχύει :

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j \qquad \text{(ΠΡ.3)}$$

όπου δ_i^j είναι το γνωστό σύμβολο του Kronecker που παίρνει την τιμή της μονάδας αν i=j, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση παίρνει μηδενική τιμή.

Αν συμβολίσουμε με [ ] και ( ) το εξωτερικό και το μεικτό γινόμενο δύο και τριών αντίστοιχα διανυσμάτων αντίστοιχα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μετατροπής-υπολογισμού των βάσεων

$$(\vec{g}_1\vec{g}_2\vec{g}_3)\cdot(\vec{g}^1\vec{g}^2\vec{g}^3) = 1 \qquad \text{(ΠΡ.4)}$$

$$\vec{g}_i = \frac{\left[\vec{g}^j\vec{g}^k\right]}{(\vec{g}^i\vec{g}^j\vec{g}^k)} \qquad \text{(ΠΡ.5)}$$

Τέλος, για ένα τριδιάστατο πρόβλημα παραθέτουμε τις εκφράσεις γιά τις καρτεσιανές συνιστώσες των βάσεων αυτών, όπως αυτές προκύπτουν από την ανάπτυξη των σχέσεων (ΠΡ.1) και (ΠΡ.2). Αυτές είναι

$$\vec{g}_1 = (x_\xi, y_\xi, z_\xi) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$$

$$\vec{g}_2 = (x_\eta, y_\eta, z_\eta)$$

$$\vec{g}_3 = (x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta)$$

(ΠΡ.6)

$$\vec{g}^1 = (\xi_x, \xi_y, \xi_z) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

$\vec{g}^2 = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$

$\vec{g}^3 = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$

ΠΡ.3 Ανάλυση Τυχαίου Διανύσματος στις Δύο Βάσεις

‘Εστω $\vec{A}$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στη θέση Μ του τριδιάστατου χωρίου στο οποίο δημιουργείται το δομημένο πλέγμα. Η ανάλυσή τους στις δύο προηγούμενα ορισθείσες διανυσματικές βάσεις μπορεί να γίνει με τους εξής δύο τρόπους :

- Κάνοντας χρήση της συναλλοίωτης διανυσματικής βάσης $\vec{g}_i$ (i=1,2,3) οπότε θα έχουμε

$$\vec{A} = A^i \vec{g}_i = A^1 \vec{g}_1 + A^2 \vec{g}_2 + A^3 \vec{g}_3 \qquad (ΠΡ.7)$$

Οι συνιστώσες A^i του διανύσματος $\vec{A}$ ονομάζονται ανταλλοίωτες συνιστώσες του στο σημείο Μ.

- Κάνοντας χρήση της ανταλλοίωτης διανυσματικής βάσης $\vec{g}^i$ (i=1,2,3) οπότε θα έχουμε

$$\vec{A} = A_i \vec{g}^i = A_1 \vec{g}^1 + A_2 \vec{g}^2 + A_3 \vec{g}^3 \qquad (ΠΡ.8)$$

Με τη νέα ανάλυση (ΠΡ.8) ορίζονται τώρα οι συναλλοίωτες συνιστώσες A_i του διανύσματος $\vec{A}$ γιά το σημείο Μ.

Είναι αρκετά απλό, κάνοντας χρήση της ταυτότητας (ΠΡ.3) να δείξουμε ότι :

$$\begin{aligned} A_i &= \vec{A} \cdot \vec{g}_i \quad (i = 1,2,3) \\ A^i &= \vec{A} \cdot \vec{g}^i \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \qquad (ΠΡ.9)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (ΠΡ.9) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος $\vec{A}$. Ετσι, γιά παράδειγμα, υπολογίζουμε τη δεύτερη ανταλλοίωτη συνιστώσα A^2 του διανύσματος $\vec{A}$ από τη σχέση

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{g}^2 = (A_x, A_y, A_z) \cdot (\eta_x, \eta_y, \eta_z) = A_x \eta_x + A_y \eta_y + A_z \eta_z$$

όπου (A_x,A_y,A_z) είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του $\vec{A}$.

ΠΡ.4 Ο Μετρικός Τανυστής

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής g_{ij} ορίζεται από τη σχέση

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \qquad \text{(ΠΡ.10)}$$

ενώ ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής g^{ij} από τη σχέση

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \qquad \text{(ΠΡ.11)}$$

Η ποσότητα g_{ij} είναι ανάλογη του συνημιτόνου της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ μιάς γραμμής κατά μήκος της οποίας η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ^i μεταβάλλεται (ενώ οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές) και μιάς γραμμής κατά μήκος της οποίας μεταβάλλεται η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ^j. Ετσι, οι μή-διαγώνιοι όροι του συμμετρικού τανυστή g_{ij} μηδενίζονται γιά ορθογώνιο πλέγμα. Δηλαδή γιά ένα <u>ορθογώνιο</u> τριδιάστατο πλέγμα ισχύουν:

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{31} = g_{13} = 0 \qquad \text{(ΠΡ.12)}$$

$$g_{23} = g_{32} = 0$$

Η ποσότητα g_{ii}, χωρίς άθροιση στο i, είναι ανάλογη του μήκους τόξου κατά μήκος μιάς γραμμής στην οποία μεταβάλλεται η ξ^i καμπυλόγραμμη συντεταγμένη. Ετσι το μήκος τόξου κατά μήκος μιάς οποιασδήποτε καμπύλης γραμμής, που μπορεί και να μην είναι πλεγματική γραμμή, δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, d\,\xi^i\, d\,\xi^j \qquad \text{(ΠΡ.13)}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k \qquad \text{(ΠΡ.14)}$$

Επίσης, συμβολίζουμε με J και G τις Ιακωβιανές ορίζουσες του μετασχηματισμού οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \qquad \text{και} \qquad G = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{vmatrix} \tag{ΠΡ.15}$$

Ορίζοντας επιπλέον ότι

$$g = \det(g_{ij}) \tag{ΠΡ.16}$$

αποδεικνύονται οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} (\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3)^2 &= |\det(g_{ij})| \quad , \quad J^2 = |g| \\ (\vec{g}^1 \vec{g}^2 \vec{g}^3)^2 &= |\det(g^{ij})| \quad , \quad G^2 = \frac{1}{|g|} \end{aligned} \tag{ΠΡ.17}$$

και προφανώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$GJ = 1 \tag{ΠΡ.18}$$

Η ορίζουσα $\sqrt{g}$ ή J έχει μια πολύ κατανοητή φυσική σημασία, αφού αποτελεί το μέτρο του εμβαδού μιάς κυψέλης γιά ένα διδιάστατο πλέγμα ή του όγκου της κυψέλης για ένα τριδιάστατο πλέγμα.

Θα δώσουμε τέλος μια σειρά από χρήσιμες σχέσεις που αφορούν στο μετρικό τανυστή, χωρίς ωστόσο να δίνουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στο μαθηματικό τρόπο θεμελίωσής τους γιά να μήν κουράσουμε τόν αναγνώστη. Ετσι, το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης $d\vec{r}$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορίζεται ως

$$d\vec{r} = d\,\xi^i\,\vec{g}_i \tag{ΠΡ.19}$$

Ενώ το διαφορικό της συναλλοίωτης διανυσματικής βάσης είναι

$$d\,\vec{g}_i = \Gamma^k_{ij}\,d\,\xi^j\,\vec{g}_k \tag{ΠΡ.20}$$

Η ποσότητα Γ^k_{ij} παριστά το σύμβολο του Christoffel που ορίζεται συναρτήσει των παραγώγων του μετρικού τανυστή

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^{j}} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^{l}} \right) \qquad (\text{ΠΡ.21})$$

και για το οποίο ισχύει η προφανής, λόγω του τρόπου που ορίστηκε, ιδιότητα

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \qquad (\text{ΠΡ.22})$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (ΠΡ.20) ως προς το ξ^j λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial x_r}{\partial \xi^k} = 0 \qquad (\text{ΠΡ.23})$$

και η σχέση αυτή ισχύει γιά το x_1=x, το x_2=y και το x_3=z. Οι όροι του αριστερού μέλους της σχέσης (ΠΡ.23) αποτελούν τις συνιστώσες ενός συμμετρικού, δεύτερης τάξης συναλλοίωτου τανυστή ο οποίος ονομάζεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της απεικόνισης $x_i=f_i(\xi^j)$. Η προβολή του τανυστή αυτού που προκύπτει με εσωτερικό πολλαπλασιασμό με το g_{ij} αποτελεί το τασικό πεδίο του μετασχηματισμού f και αποτελείται από ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_r}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial x_r}{\partial \xi^k} = 0 \qquad (\text{ΠΡ.24})$$

Ας συγκρατήσουμε τη διαφορική εξίσωση (ΠΡ.24), όπως αυτή διατυπώνεται για τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1=x), (x_2=y) και (x_3=z) αφού αποτελεί το πιό διαδεδομένο "υπολογιστικό εργαλείο" γιά τη γένεση αριθμητικών πλεγμάτων, μέσω ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων.

ΠΡ.5 <u>Εκφράσεις Διαφορικών Τελεστών στο ΣΚΣ</u>

Αφού τα δομημένα πλέγματα και άρα τα ΣΚΣ στα οποία αναφερόμαστε πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση και επίλυση σε αυτά μερικών διαφορικών εξισώσεων, χρειάζεται να δοθούν εκφράσεις για τους πιο βασικούς διαφορικούς τελεστές. Έτσι, αν Φ ένα βαθμωτό πεδίο και $\vec{A}$ ένα διανυσματικό πεδίο, η κλίση (grad) του βαθμωτού, η απόκλιση (div) του διανυσματικού και ο τελεστής Laplace γράφονται:

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \nabla \xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \vec{g}^{\,i} \qquad (\text{ΠΡ.25})$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}(JA^i) \qquad \text{(ΠΡ.26)}$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^j} \right) \qquad \text{(ΠΡ.27)}$$

ΠΡ.6 Τυπολόγιο Μετασχηματισμών των Μετρικών

Δίνονται, στη μορφή τυπολόγιου, οι εκφράσεις που συσχετίζουν τις μετρικές της απεικόνισης $(x, y) \to (\xi, \eta)$ με αυτές της απεικόνισης $(\xi, \eta) \to (x, y)$. Είναι

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J} \qquad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J} \qquad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J} \qquad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \qquad \text{(ΠΡ.28)}$$

όπου η Ιακωβιανή J γράφεται

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \qquad \text{(ΠΡ.29)}$$

Για τριδιάστατα χωρία και πλέγματα, οι εκφράσεις που συσχετίζουν τις μετρικές της απεικόνισης $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$ με αυτές της απεικόνισης $(\xi, \eta, \zeta) \to (x, y, z)$ είναι

$$J\xi_x = y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta \qquad J\eta_x = y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta \qquad J\zeta_x = y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi$$

$$J\xi_y = x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta \qquad J\eta_y = x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi \qquad J\zeta_y = x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta \qquad \text{(ΠΡ.30)}$$

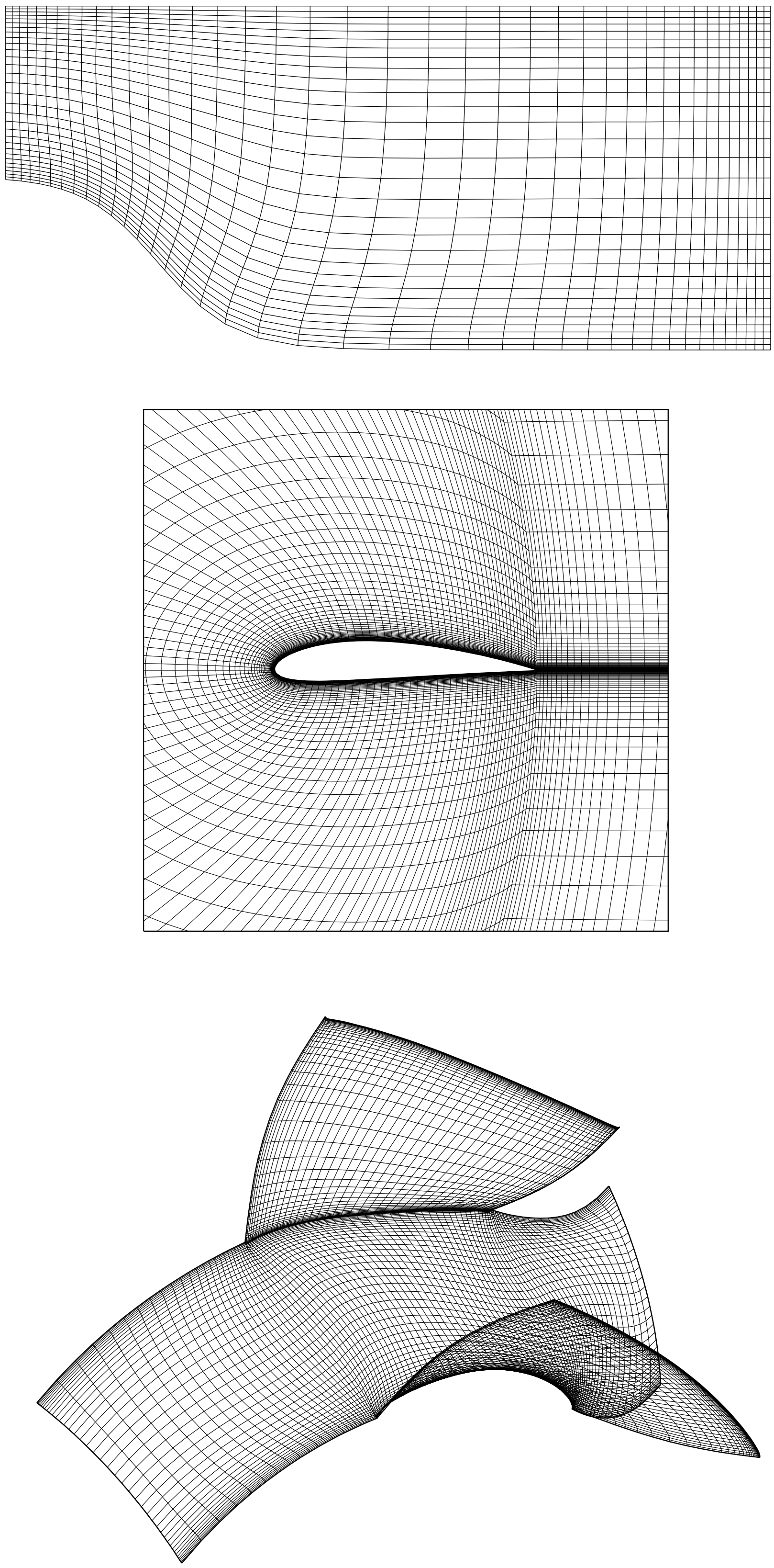
$$J\xi_z = x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \qquad J\eta_z = x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta \qquad J\zeta_z = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

Η (ΠΡ.30) επιτρέπει να διατυπωθούν ανάλογες σχέσεις για το μετασχηματισμό των μετρικών δεύτερης τάξης g_{ij} και g^{ij}. Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις

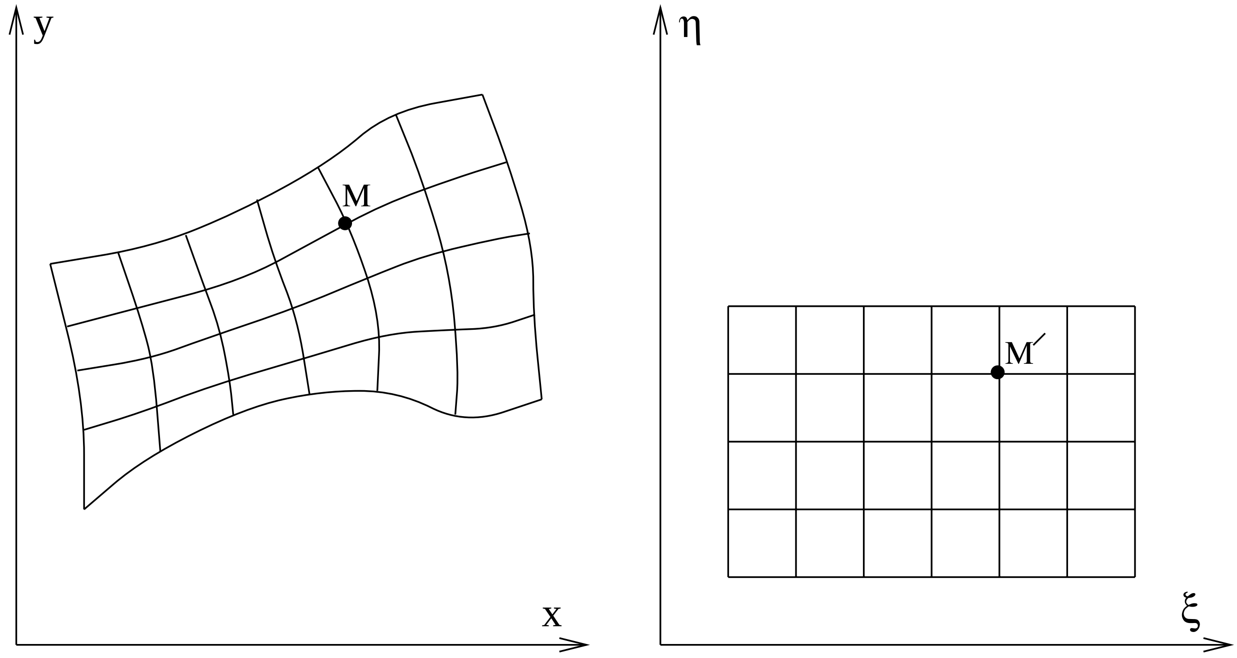
$$J^2 g^{11} = g_{22} g_{33} - g_{23} g_{32} \qquad J^2 g^{12} = g_{13} g_{32} - g_{12} g_{33}$$

$$J^2 g^{22} = g_{11} g_{33} - g_{13} g_{31} \qquad J^2 g^{23} = g_{21} g_{13} - g_{11} g_{23} \qquad \text{(ΠΡ.31)}$$

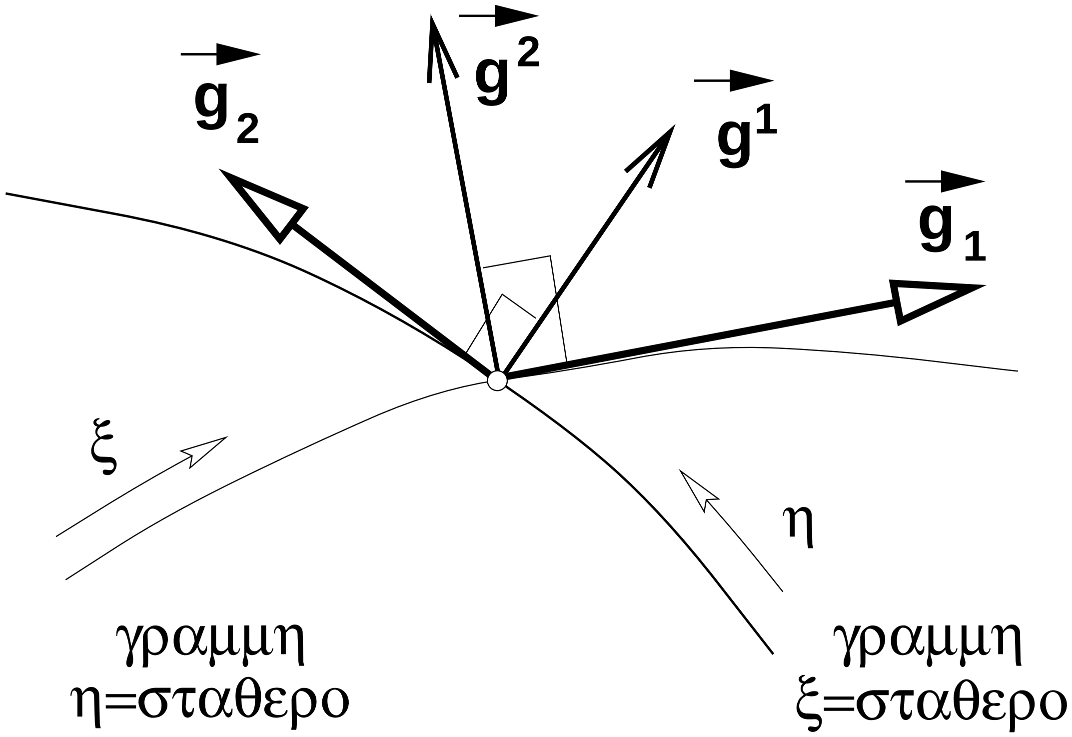
$$J^2 g^{33} = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} \qquad J^2 g^{31} = g_{22} g_{31} - g_{21} g_{32}$$



<u>**Σχήμα ΠΡ.1**</u> **:** Διδιάστατα δομημένα πλέγματα σε αποκλίνοντα αγωγό και γύρω από αεροτομή, καθώς και τριδιάστατο πλέγμα (φαίνονται μόνο ορισμένες επιφάνειες) σε μια πτερύγωση στροβιλομηχανής.



<u>Σχήμα ΠΡ.2</u> Απεικόνιση του πλέγματος του φυσικού χωρίου στο μετασχηματισμένο χωρίο.



<u>Σχήμα ΠΡ.3:</u> Η ανταλλοίωτη και συναλλοίωτη διανυσματική βάση στο διδιάστατο πεδίο.