

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Επ. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΑ

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΗ-ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΛΥΣΗ

ΠΑ.1 Σκοπός της Προσαρμογής

Με τον όρο προσαρμογή ενός υπολογιστικού πλέγματος στη λύση ενός μοντελοποιημένου φυσικού προβλήματος εννοούμε την διαδικασία του εμπλουτισμού-απεμπλουτισμού του, με την προσθήκη ή αφαίρεση στοιχείων του πλέγματος (κόμβων-ακμών-τριγώνων αν πρόκειται για πλέγμα τριγωνικών στοιχείων) σε συγκεκριμένες περιοχές του χωρίου. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια εξέλιξης της λύσης του φυσικού προβλήματος (περιοδικά στα πλαίσια του επαναληπτικού σχήματος επίλυσης), σύμφωνα με κανόνες που σχετίζονται με τοπικές ιδιότητες της υπό διαμόρφωση λύσης. Περιοχές που απαιτούν εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό σε στοιχεία αναγνωρίζονται με την ικανοποίηση σχετικών κριτηρίων σε τρόπο ώστε να υπάρχει επαρκής ανάλυση του διακριτοποιημένου χωρίου που να επιτρέπει την αριθμητική επίλυση του φυσικού προβλήματος με την επιθυμητή ακρίβεια στις περιοχές αυτές. Από την άλλη πλευρά, η διαδικασία του απεμπλουτισμού αποτρέπει την υπερφόρτωση του υπολογιστικού πλέγματος με επιπλέον στοιχεία σε περιοχές όπου αυτά είναι περιττά και κρατά σε λογικά επίπεδα το χρόνο υπολογισμού και την απαιτούμενη μνήμη.

Η ενότητα αυτή αντιμετωπίζει ουσιαστικά το πρόβλημα της προσαρμογής όπως συμβαίνει κατά τη χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων. Βέβαια, η επέκταση όσων θα αναλυθούν και σε άλλα μη-δομημένα πλέγματα είναι αρκετά εύκολη. Για τα δομημένα πλέγματα, τα πράγματα είναι διαφορετικά αφού εκεί κάθε εμπλουτισμός ή απεμπλουτισμός πρέπει να έχει συνολικό και όχι τοπικό χαρακτήρα. Όταν χρειάζεται αναφορά σε φυσικά προβλήματα, συνήθως θα γίνεται αναφορά σε προβλήματα ροής. Σ' αυτά, η διαδικασία προσαρμογής του πλέγματος εφαρμόζεται σε περιοχές ανακυκλοφορίας, κυμάτων κρούσης, οριακών στρωμάτων, σημείων ανακοπής κ.τ.λ. Αντίστοιχες περιοχές μπορεί να διατυπώσει κανείς και για κατασκευαστικά προβλήματα.

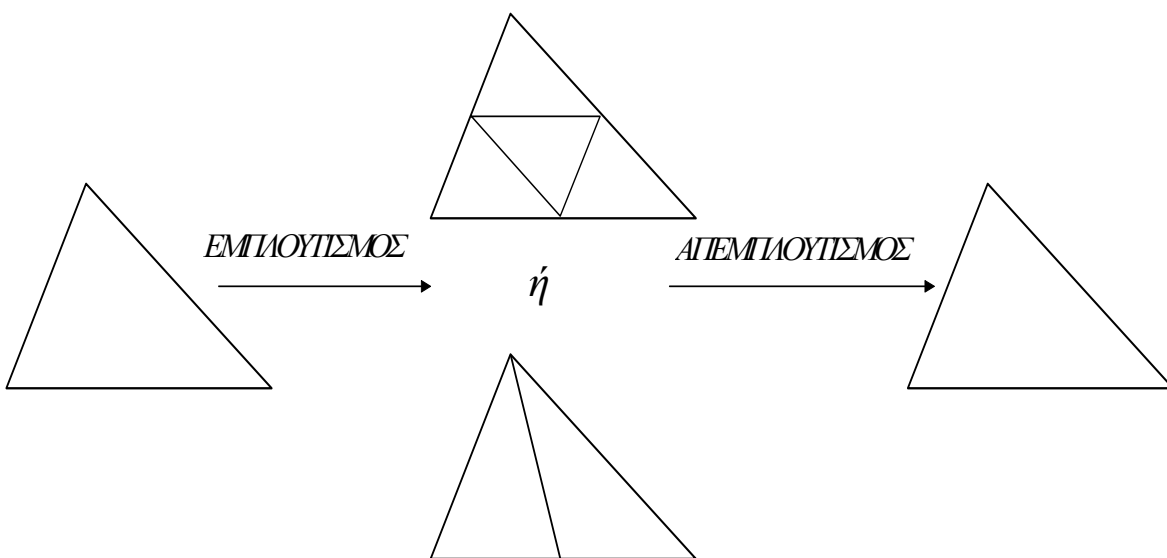
Οι λόγοι που επιβάλλουν την προσαρμογή των πλεγμάτων είναι πολλοί. Κατ'αρχή πολλά χαρακτηριστικά της ροής είναι άγνωστα μέχρι να λυθεί το πρόβλημα, ή έστω μέχρι να πάρουμε μια πρώτη γενική εικόνα του πεδίου λύσης. Άρα ξεκινώντας την επίλυση του προβλήματος δεν είναι γνωστό λ.χ. το που θα εμφανιστεί η ασυνέχεια, οπότε αδυνατούμε να κατασκευάσουμε εξ αρχής το κατάλληλο πλέγμα. Με τη διαδικασία της προσαρμογής ενός πλέγματος, κατά τη διάρκεια εξέλιξης της αριθμητικής λύσης, μας δίνεται η δυνατότητα να ξεκινήσουμε την επίλυση από ένα σχετικά αραιό πλέγμα το οποίο επιτρέπει την απόκτηση μιας γενικής εικόνας του πεδίου λύσης και στη συνέχεια με το σωστό πύκνωμα ή αραιώμα, ανά περιοχές, του πλέγματος να πετύχουμε μια πιο ακριβή λύση. Επιπλέον μας δίνεται η δυνατότητα να παρακολουθούμε λ.χ. μια ασυνέχεια που κινείται. Ακόμα και σε περίπτωση που είναι "περίπου" γνωστή η μορφή του πεδίου, είναι ασύμφορο υπολογιστικά να επιλύεται το πρόβλημα από την αρχή με πυκνό πλέγμα, δηλαδή με πολλούς υπολογιστικούς κόμβους. Το να ξεκινήσει, βέβαια, η λύση από ένα πολύ αραιό αρχικό πλέγμα μπορεί να αποβεί αναποτελεσματικό, σε κάποιες περιπτώσεις.

Σε σχέση με την προσαρμογή δομημένων πλεγμάτων, αυτή των μη-δομημένων παρουσιάζει ορισμένα βασικά πλεονεκτήματα. Το πιο σημαντικό από αυτά είναι η δυνατότητα τοπικής επέμβασης στο πλέγμα και μόνο στην περιοχή ενδιαφέροντος, ενώ αντίθετα κάθε επέμβαση σε δομημένα πλέγματα πρέπει είναι ολική, με προσθήκη γραμμών και στηλών σε όλο το χωρίο. Επίσης είναι σαφώς πιο εύκολη η επέμβαση σε πλέγμα σύνθετων γεωμετριών. Η πιο άμεση και εύκολη διαδικασία της προσαρμογής σε συνδυασμό με την ικανότητα κατασκευής πλέγματος σε σύνθετες γεωμετρίες αποτελεί ουσιαστικά το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης μη-δομημένων πλεγμάτων σε σχέση με τη χρήση των δομημένων. Προβλήματα που μπορεί να παρουσιασθούν εξαιτίας της προσαρμογής των μη-δομημένων πλεγμάτων, στη μορφή απόκλισης της αριθμητικής από την ακριβή λύση, μπορεί να οφείλονται στη γεινίαση μικρών με μεγάλες κυψέλες που είναι δυνατόν να δημιουργηθούν μετά από προσαρμογή. Τέλος πρέπει να τονιστεί πως ο χειρισμός της προσαρμογής μη-δομημένων πλεγμάτων είναι πιο πολύπλοκος από αυτόν των δομημένων, και απαιτεί μεγαλύτερο προγραμματιστικό χρόνο. Για την αποφυγή σύγχυσης πρέπει να διευκρινιστεί ότι η παρούσα εργασία ασχολείται μόνο με τεχνικές προσαρμογής που σέβονται τις γενικότερες αρχές τοπολογίας ενός πλέγματος. Έτσι για παράδειγμα, δε γίνεται αναφορά σε τεχνικές απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding) οι οποίες ούτως ή άλλως, μπορούν να λειτουργήσουν ανεξάρτητα από το εάν το πλέγμα είναι δομημένο ή μη-δομημένο.

Με βάση τα παραπάνω, η βασική αρχή που διέπει την τοπολογία ενός-μη δομημένου πλέγματος και η οποία πρέπει να ισχύει σε κάθε φάση (αρχική, ενδιάμεση ή τελική) της διαδικασίας της προσαρμογής, συνοψίζεται στο ότι δεν επιτρέπεται η δημιουργία υπολογιστικού κόμβου στο εσωτερικό της ακμής ενός ενεργού τριγώνου. (Ο όρος ενεργό τρίγωνο θα γίνει κατανοητός στη συνέχεια. Εδώ διευκρινίζουμε ότι με τον όρο αυτό χαρακτηρίζεται κάθε τρίγωνο που κατά τη συγκεκριμένη χρονική επανάληψη συμμετέχει στον υπολογισμό.)

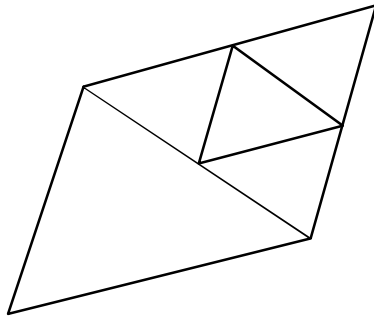
ΠΛ.2 Βασικές Αρχές της Προσαρμογής

Η προσαρμογή λειτουργεί με τον εμπλουτισμό - απεμπλουτισμό του πλέγματος που λαμβάνει χώρα ανά συγκεκριμένο πλήθος επαναληπτικών βημάτων. Πιο συγκεκριμένα, ο εμπλουτισμός υλοποιείται μέσω της κατάτμησης μεγάλων τριγώνων σε μικρότερα, δημιουργώντας έτσι νέα στοιχεία (κόμβους, πλευρές, τρίγωνα). Αντίθετα, απεμπλουτισμός συνίσταται από τη συγκόλληση στοιχείων με σκοπό τον επανασηματισμό των τριγώνων από τα οποία έχουν προέλθει προήλθαν κατά τις προηγούμενες φάσεις εμπλουτισμού. Γίνεται λοιπόν αμέσως φανερό πως τα τρίγωνα του αρχικού πλέγματος δεν έχουν τη δυνατότητα να υποστούν απεμπλουτισμό. Θα συμβολίζουμε αυτά τα τρίγωνα της πρώτης γενεάς με τον όρο F1 (ο συμβολισμός αυτός είναι δανεικός από τη βιολογία). Η διαδικασία της προσαρμογής φαίνεται σχηματικά παρακάτω:

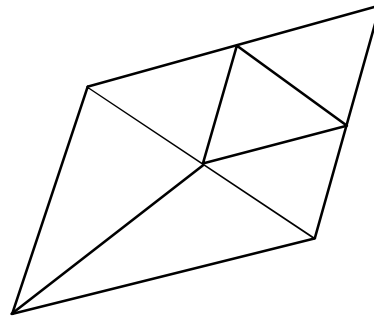


Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας εμπλουτισμού και απεμπλουτισμού

Υπάρχουν στη βιβλιογραφία πολλές μέθοδοι με τις οποίες μπορεί να υλοποιηθεί η προσαρμογή πλεγμάτων στη λύση, καθεμία από τις οποίες ακολουθεί διαφορετικές αρχές. Εδώ, η βασική αρχή της προσαρμογής είναι ότι δεν επιτρέπεται να υπάρχουν στο όριο των τριγώνων πάνω από τρεις κόμβοι, ή αλλιώς κάθε κόμβος πρέπει να είναι μόνο κοινή κορυφή τριγώνων και όχι μεσόκομβος κάποιας πλευράς, ή διαφορετικά σε κάθε κόμβο πρέπει να συντρέχουν μόνο τρίγωνα.



Μη-αποδεκτό



Δεκτό

Παράδειγμα μη-αποδεκτού και δεκτού τρόπου διάσπασης τριγώνων.

Οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται ως μη-αποδεκτές στο τελευταίο σχήμα ανήκουν ουσιαστικά στις τεχνικές απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding) που, όπως προαναφέρθηκε, δε θα μας απασχολήσουν. Απλά πρέπει να σημειωθεί ότι οι τεχνικές απλής υπέρθεσης έχουν το πλεονέκτημα να απαιτούν λιγότερο χώρο μνήμης (λόγω του ότι όταν χρειάζεται να εμπλουτιστεί ένα τριγωνικό στοιχείο, αυτό δεν παρασύρει σε εμπλουτισμό τα άμεσα γειτονικά του τρίγωνα) αλλά και το μειονέκτημα να απαιτεί πολυπλοκότερη τοπολογική δομή (λ.χ. μια ακμή παύει πλέον να αποτελεί το όριο δύο τριγώνων κ.τ.λ.) και ακόλουθη τροποποίηση του συνήθους λογισμικού επίλυσης.

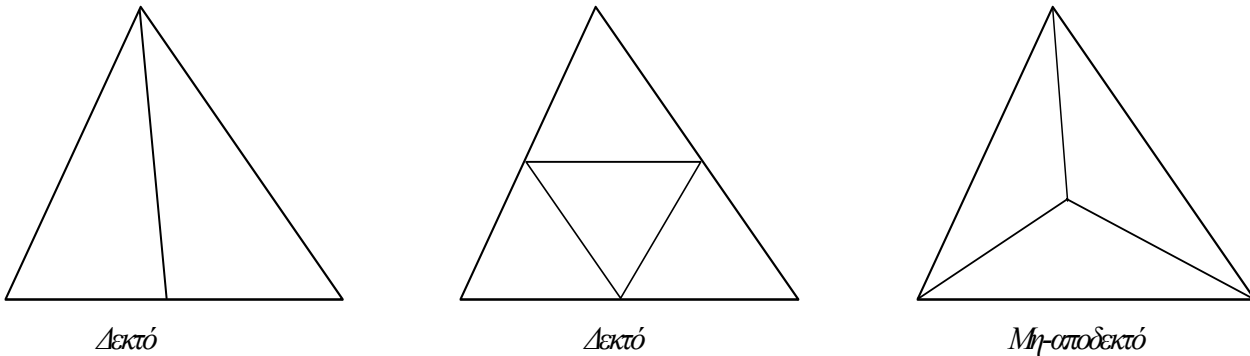
Κάθε αλγόριθμος που αναπτύσσεται για το πρόβλημα της προσαρμογής υπακούει σε κάποιους κανόνες. Μια αυτοτελής τέτοια ομάδα κανόνων, δίνεται αμέσως παρακάτω:

Κανόνας 1 (K1)

Η μορφή του αρχικού πλέγματος (πλέγμα F1) δεν επιτρέπεται να αλλάξει. Δηλαδή δεν επιτρέπεται η μετακίνηση των κόμβων ή η αναπροσαρμογή της μορφής του πλέγματος με δεδομένους τους κόμβους. Έτσι λ.χ. δεν επιτρέπεται να διατηρηθούν οι υπάρχοντες κόμβοι και να επιχειρηθεί η γένεση νέων τριγώνων λ.χ. με την τεχνική Delaunay.

Κανόνας 2 (K2)

Ένα τρίγωνο επιτρέπεται να διασπαστεί με δύο μόνο τρόπους που φαίνονται στο επόμενο σχήμα. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και ένας μη αποδεκτός τρόπος διάσπασης.



Παράδειγμα αποδεκτού και μη-αποδεκτού τρόπου γένεσης τριγώνων.

Ο κανόνας αυτός ισχύει ώστε να αποφευχθεί η δημιουργία πολύ μακρόστενων τριγώνων πράγμα που θα δημιουργούσε επιπλέον σφάλματα στην επίλυση της ροής.

Κανόνας 3 (K3)

Ένα τρίγωνο που έχει προέλθει από διάσπαση τριγώνου προηγούμενης γενεάς σε δύο τρίγωνα, δηλαδή ένα τρίγωνο με ένα αδερφό τρίγωνο δεν επιτρέπεται να διασπαστεί παραπέρα στην τρέχουσα μορφή του. Πρέπει να προηγηθεί διάσπαση του μητρικού τριγώνου σε τέσσερα, αντί δύο, τρίγωνα, και αν ακόμα ισχύουν τα κριτήρια εμπλουτισμού, τότε να προχωρήσει η διάσπαση κάποιου ή κάποιων από τα τέσσερα νέα τρίγωνα. Ο λόγος που επιβάλλεται αυτή η διαδικασία είναι, όπως και παραπάνω, να αποφευχθούν τα ιδιαίτερα μακρόστενα τρίγωνα, ως αποτέλεσμα συνεχών διχοτομήσεων τριγώνων.

Κανόνας 4 (K4)

Τρίγωνο που ανήκει σε οικογένεια τεσσάρων παιδιών επιτρέπεται να σπάσει.

Κανόνας 5 (K5)

Τα τρίγωνα δεν επιτρέπεται να διασπώνται επ' άπειρο. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται αφενός μεν η δημιουργία πολύ μικρών τριγώνων και αφετέρου δε η υπερβολική αύξηση του χρόνου υπολογισμού αλλά και απαιτούμενης μνήμης υπολογιστή, λόγω υπερβολικής και αναίτιας αύξησης του αριθμού των τριγώνων.

Κανόνας 6 (K6)

Όταν ένα τρίγωνο διασπάται, ενδέχεται να παρασύρει και ορισμένα από τα γειτονικά του ώστε να διατηρηθεί η φυσιογνωμία του τυπικού μη-δομημένου πλέγματος.

Κανόνας 7 (K7)

Στα περιοδικά πλέγματα, η γένεση ή η απαλοιφή στοιχείων στο περιοδικό όριο πρέπει να συνοδεύεται από αντίστοιχη γένεση ή απαλοιφή στην περιοχή που αντιστοιχεί σ' αυτό μέσω της περιοδικότητας.

ΠΛ.3 Διαχείριση Πληροφοριών κατά την Προσαρμογή

Λόγω της φύσης των μη-δομημένων πλεγμάτων η διαχείρισή τους και ακόμα περισσότερο η προσαρμογή τους στη λύση είναι μια αρκετά πολύπλοκη διεργασία. Έτσι, ενώ σε ένα δομημένο πλέγμα αρκούν δύο δείκτες (i, j) για να οριστεί πλήρως ένας υπολογιστικός κόμβος (π.χ. ο $i+1, j$ είναι ο ανατολικός του κόμβος, σε ένα μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων απαιτείται μια σειρά πληροφοριών που να συνδέει κόμβους, πλευρές και τρίγωνα, ώστε να είναι εύκολη η προσπέλαση και η διαχείριση όλων των στοιχείων του. Πρόσθετες πληροφορίες που να συσχετίζουν τις διάφορες «γενεές» (από προσαρμογή σε προσαρμογή) πλεγμάτων μεταξύ τους, είναι επίσης αναγκαίες.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει διαχωρισμός των πλευρών των τριγώνων του υπολογιστικού πλέγματος σε τρεις κατηγορίες:

α) Ενεργά: Είναι αυτά που λαμβάνονται υπόψη στην επίλυση της ροής κατά την τρέχουσα επανάληψη. Αυτά μπορεί να είναι είτε στοιχεία του αρχικού πλέγματος, είτε μεταγενέστερα αυτών, δηλαδή προερχόμενα από διάσπαση στοιχείων προγενέστερων γενεών.

β) Ανενεργά: Είναι αυτά που δε λαμβάνονται υπόψη στην επίλυση στην τρέχουσα επανάληψη λόγω της αντικατάστασής τους από άλλα νεότερης γενεάς σε κάποιο στάδιο της προσαρμογής. Αν υπάρχει δυνατότητα απεμπλουτισμού, τα χαρακτηριστικά τους (συντεταγμένες, τοπολογική σύνδεση μεταξύ κόμβων, πλευρών και τριγώνων, γενεαλογικές πληροφορίες) πρέπει να παραμείνουν αποθηκευμένα σε γενεαλογικούς και τοπολογικούς πίνακες. Ο λόγος είναι ότι με τη διαδικασία του απεμπλουτισμού υπάρχει το ενδεχόμενο να ξαναγίνουν ενεργά σε μια μεταγενέστερη φάση του υπολογισμού. Επίσης οι γενεαλογικές πληροφορίες των οριακών κόμβων του αρχικού πλέγματος (κομβοί F1) είναι αναγκαίες για την εύρεση των συντεταγμένων των νέων κόμβων με παρεμβολή.

γ) Εξουδετερωμένα: Είναι αυτά που έχουν απαλειφθεί λόγω του απεμπλουτισμού (ή και μερικών σταδίων του εμπλουτισμού). Τα στοιχεία αυτά δε χρειάζονται πλέον και τα χαρακτηριστικά τους σβήνονται από τους τοπολογικούς και γενεαλογικούς πίνακες. Οι αριθμοί ταυτότητας (IDentification number) που τα χαρακτηρίζουν πρέπει να εισέρχονται σε κατάλληλη λίστα αναμονής για να μπορέσουν να ξαναχρησιμοποιηθούν αργότερα, ώστε να χαρακτηρίσουν νέα στοιχεία του πλέγματος που ενδεχόμενα θα δημιουργηθούν σε επόμενη φάση.

Τις αναγκαίες πληροφορίες που χρειάζονται για να περιγραφεί ένα πλέγμα τριγωνικών στοιχείων περιέχουν οι **τοπολογικοί πίνακες**. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε τρίγωνο θα μπορούσαν να αποθηκεύονται οι τρεις κορυφές και οι τρεις πλευρές του, για κάθε πλευρά οι δύο ακραίοι κόμβοι της, ενώ για κάθε κόμβο οι συντεταγμένες του καθώς και ένας λογικός δείκτης που φανερώνει τον τύπο του. Ο τελευταίος δείκτης περιγράφει το αν είναι εσωτερικό σημείο του χωρίου ή οριακό σημείο και τι τύπου οριακή συνθήκη θα εφαρμοστεί εκεί..

Από την άλλη πλευρά, οι απαραίτητες πληροφορίες για την πραγματοποίηση της προσαρμογής περιέχονται στους **γενεαλογικούς πίνακες**. Είναι προφανές ότι αν δεν πρόκειται να λειτουργήσει η διαδικασία προσαρμογής, για την αριθμητική επίλυση του πεδίου ροής χρειάζονται μόνο οι τοπολογικοί και όχι οι γενεαλογικοί πίνακες. Λογικό είναι ότι οι πληροφορίες των γενεαλογικών πινάκων μπορούν να αποθηκευτούν με πολλούς τρόπους. Η οικονομία υπολογιστικής μνήμης και η εύχρηστη διαχείριση και ανανέωση των πινάκων είναι πρωταρχικό μέλημα του προγραμματιστή. Για παράδειγμα, οι γενεαλογικοί πίνακες μπορούν να ορίζονται σε πλευρές και τρίγωνα. Ένας τρόπος αποθήκευσης, όχι αναγκαστικά ο καλύτερος, θα ήταν να αποθηκεύονται τέτοιες πληροφορίες:

-στις **πλευρές**, όπου για κάθε πλευρά φυλάσσονται πληροφορίες που αφορούν το αν αυτή είναι ενεργός ή όχι, τον αριθμό ταυτότητας (ID) της πλευράς από την οποία προήλθε, για την περίπτωση που προέρχεται από διάσπαση πλευράς προηγούμενης γενεάς, τα ID των πλευρών στις οποίες έχει διασπαστεί και του ID του μεσόκομβού της, αν στη παρούσα φάση είναι διασπασμένη, οπότε είναι και ανενεργός. Ο γενεαλογικός πίνακας αποτελείται από την παρακάτω σχηματική δομή ανά πλευρά πλευρά του πλέγματος:

α	β	γ	δ
----------	---------	----------	----------

Όπου:

α, β - ID των απογόνων πλευρών

ή

0 (αν είναι ενεργός)

γ - ID της μητρικής πλευράς

ή

0 αν είναι η ίδια στοιχείο του πλέγματος F1

ή είναι εσωτερική πλευρά μητρικού τριγώνου

δ - ID του μεσόκομβου

ή

0 (αν είναι ενεργός)

-στα **τρίγωνα**, όπου και εδώ για κάθε τρίγωνο αποθηκεύονται πληροφορίες που αφορούν το αν αυτό είναι ενεργό ή όχι, τον αριθμό ταυτότητας (ID) του τριγώνου από το οποίο έχει προέλθει, στην περίπτωση που δεν είναι τρίγωνο του αρχικού πλέγματος, και τα ID των τριγώνων που έχουν δημιουργηθεί από τη διάσπαση του, αν επιπλέον είναι ανενεργό. Ο γενεαλογικός πίνακας αποτελείται από την παρακάτω σχηματική δομή ανά τριγωνικό στοιχείο πλέγματος:

α	β	γ	δ	ε	ζ
----------	---------	----------	----------	---------------	---------

όπου:

- α - πλήθος απογόνων
 0 (αν είναι ενεργό)
 2 (αν είναι ανενεργό)
 4 (αν είναι ανενεργό)
 -1 (αν είναι εξουδετερομένο)
- $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ - ID των απογόνων τριγώνων
- ζ - ID του μητρικού τριγώνου
 ή
 0 αν το τρίγωνο ανήκει στο F1 πλέγμα

ΠΛ.4 Κριτήρια Εμπλουτισμού και Απεμπλουτισμού

Όπως έχει αναφερθεί σκοπός της προσαρμογής είναι η προσέγγιση της ακριβούς αριθμητικής λύσης με τη χρήση κατά το δυνατό λιγότερων υπολογιστικών στοιχείων. Βασικό στοιχείο που καθορίζει την επιτυχία αυτής της προσέγγισης είναι και η σωστή επιλογή των περιοχών του χωρίου όπου θα πραγματοποιηθεί ο εμπλουτισμός του πλέγματος. Η επιλογή αυτή συνήθως γίνεται με κριτήρια που εφαρμόζονται πάνω σε **ακμές**. Λαμβάνονται, δηλαδή, υπόψη κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη του πεδίου πάνω σε κάθε ενεργό πλευρά του πλέγματος και στη συνέχεια αποφασίζεται ποιες από αυτές θα σημειωθούν ως υποψήφιες προς εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό. Άρα η σωστή αυτή επιλογή των περιοχών όπου θα επέμβει ο αλγόριθμος εξαρτάται από τρεις παραμέτρους.

α) Την κατάλληλη επιλογή φυσικής ποσότητας (**αισθητήριο**) (σε προβλήματα ροής θα μπορούσε να είναι η ταχύτητα, η πυκνότητα, ή η πίεση κ.λ.π.), που να μπορεί να δώσει επαρκείς ενδείξεις για τις περιοχές του πεδίου όπου συμβαίνουν τα κυρίως φυσικά φαινόμενα (λ.χ. ασυνέχειες) και όπου μια πιο ακριβής εικόνα του πεδίου είναι επιθυμητή.

β) Την εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης (**συνάρτηση κρίσης**) που εφαρμοζόμενη πάνω σε κάθε ενεργό πλευρά να παρέχει, στηριζόμενη στην προεπιλεγείσα φυσική ποσότητα-αισθητήριο, μια αριθμητική ένδειξη της ευαισθησίας της πλευράς αυτής. (π.χ. η πρώτη ή δεύτερη παράγωγος, η διαφορά, ο μέσος όρος, ένας διαφορικός τελεστής, κ.λ.π.)

γ) Την τελική απόφαση για το ποιες πλευρές θα μαρκαριστούν προς εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό, ορίζοντας κατώφλια για τις παραπάνω αριθμητικές ενδείξεις. Τα κατώφλια εμπλουτισμού και απεμπλουτισμού πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αποφεύγεται μια διαρκής ενεργοποίηση-απενεργοποίηση των ίδιων πλευρών.

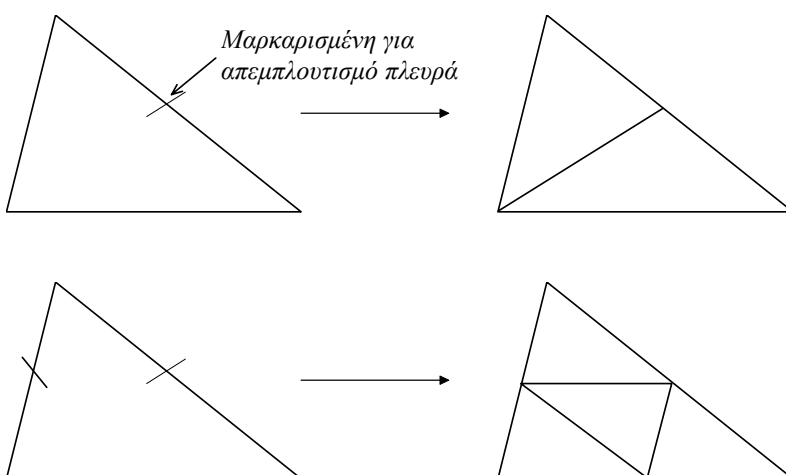
Σημειώνουμε ότι είναι ενδεχόμενο τα αισθητήρια ή και οι αντίστοιχες συναρτήσεις κρίσης να είναι περισσότερες της μίας, με κάθε μια από αυτές να εντοπίζει διαφορετικά φυσικά φαινόμενα, οπότε ενδεχόμενα να ενεργοποιείται καθεμία και σε διαφορετική περιοχή του πεδίου.

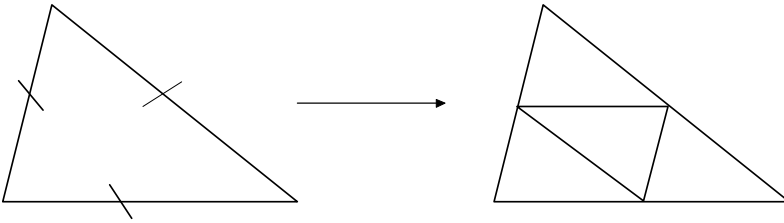
Σε αυτό το στάδιο, όπου εντοπίζονται οι υποψήφιες για εμπλουτισμό και απεμπλουτισμό πλευρές, εφαρμόζεται και ο κανόνας K5 της προσαρμογής. Με βάση αυτόν, για την αποφυγή δημιουργίας υπερβολικά μικρών τριγώνων, πλευρές από κάποιου μήκους και κάτω δεν επιτρέπεται να σημειώνονται για εμπλουτισμό, παρά μόνο για ενδεχόμενο απεμπλουτισμό. Το μήκος αυτό ορίζεται αυθαίρετα συνήθως ως ένα ποσοστό (έστω το 10~20%) του ελάχιστου μήκους πλευράς του αρχικού πλέγματος.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι το μαρκάρισμα μιας πλευράς για εμπλουτισμό θα την οδηγήσει υποχρεωτικά σε διάσπαση, ενώ μαρκάρισμα για απεμπλουτισμό δε σημαίνει αναγκαστικά και απαλοιφή της πλευράς. Τέλος υπάρχει η δυνατότητα, μια πλευρά, ακόμα και αν δεν είναι μαρκάρισμα, να διασπαστεί όταν το επιβάλλουν λόγοι διατήρησης της γενικής φυσιολογίας ενός μη-δομημένου πλέγματος γεγονός που είναι αποτέλεσμα της τήρησης των κανόνων προσαρμογής που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο.

ΠΛ.5 Διαδικασία Εμπλουτισμού

Η διαδικασία του εμπλουτισμού ξεκινά αφού έχουν ήδη σαρωθεί οι ακμές του πλέγματος και έχουν σημειωθεί με ένα λογικό δείκτη εκείνες που είναι υποψήφιες για διάσπαση (μαρκάρισμα ακμών). Οι πλευρές αυτές θα διασπαστούν οπωσδήποτε προς δημιουργία νέων σημείων, πλευρών και τριγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

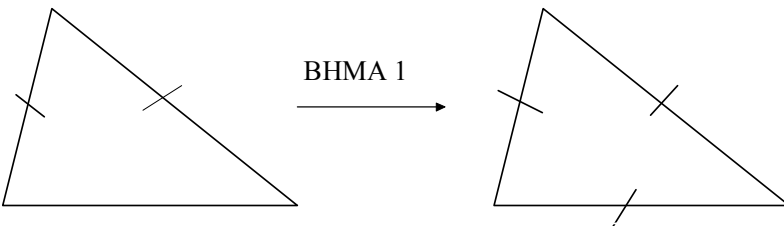




Στον αλγόριθμο προσαρμογής που χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία εμπλουτισμού ακολουθεί τα εξής βασικά βήματα.

ΒΗΜΑ 1

Μετά τη διαδικασία του μαρκαρίσματος, είναι δυνατό να έχουν μαρκαριστεί για απεμπλουτισμό δύο μόνο από τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου. Σύμφωνα με τον κανόνα K2 της προσαρμογής, η διάσπαση επιτρέπεται μόνο κατά δύο τρόπους. Δηλαδή με τη διχοτόμηση είτε της μιας είτε και των τριών πλευρών του τριγώνου. Επομένως γίνεται η σύμβαση σε μια τέτοια περίπτωση αυτόματα να μαρκάρεται αναγκαστικά και η τρίτη πλευρά ενός τέτοιου τριγώνου.



ΒΗΜΑ 1

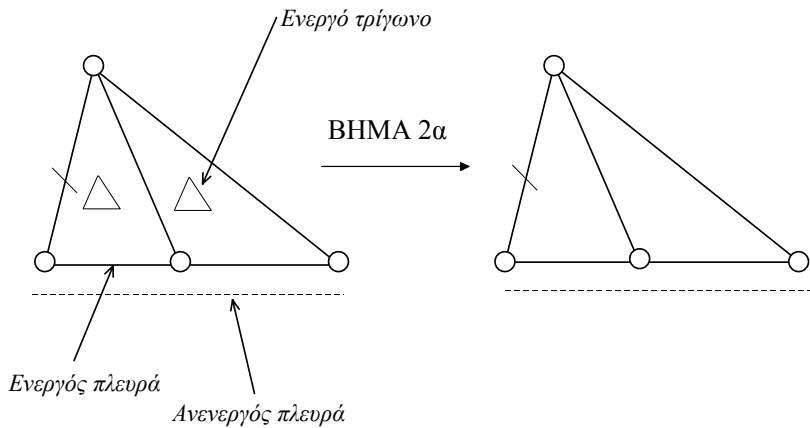
Σε τρίγωνο με δύο μαρκαρισμένες για εμπλουτισμό πλευρές μαρκάρεται υποχρεωτικά και η τρίτη.

ΒΗΜΑ 2

Σύμφωνα με τον K3 της προσαρμογής δεν επιτρέπεται σε τρίγωνα που έχουν προέλθει από μητρικό τρίγωνο με δύο παιδιά να διασπαστεί εκ νέου στη μορφή που είναι. Επομένως, σε περίπτωση που εντοπιστεί τρίγωνο με σημειωμένη για εμπλουτισμό κάποια πλευρά του, και ανήκει σε οικογένεια δύο παιδιών, τότε αυτό και το αδερφό του τρίγωνο (τα δύο τρίγωνα-παιδιά του μητρικού) απαλείφονται και σημειώνονται για διάσπαση και οι τρεις πλευρές του μητρικού τριγώνου.

Η ακριβής διαδικασία είναι:

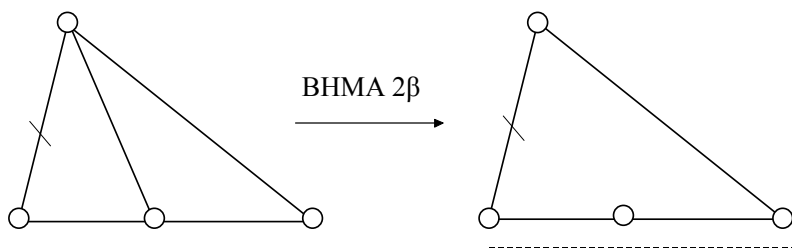
α) Απαλείφονται τα δύο παιδιά. τρίγωνα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παύουν δηλαδή να είναι ενεργά, και οι ID τους εισέρχονται στη λίστα αναμονής των τριγώνων για πιθανή μελλοντική χρήση.



ΒΗΜΑ 2α

Απαλειφή των απογόνων τριγώνων μητρικού με δύο παιδιά και μαρκαρισμένη τουλάχιστον μία τουλάχιστον πλευρά για απεμπλουτισμό.

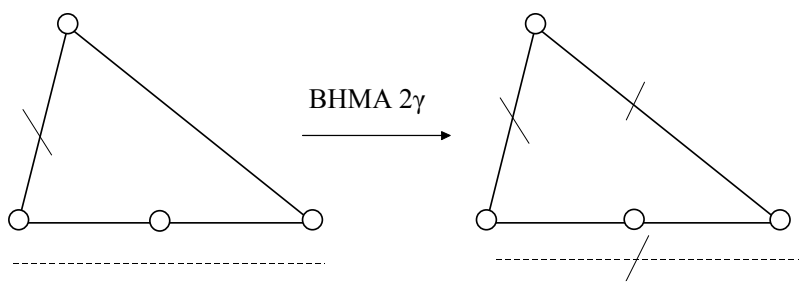
β) Απαλείφεται η κοινή τους πλευρά και ο ID του εισέρχεται στη λίστα αναμονής των τριγώνων για μελλοντική χρήση.



ΒΗΜΑ 2β

Απαλειφή της κοινής πλευράς των απογόνων τριγώνων

γ) Μαρκάρονται για εμπλουτισμό και οι **τρεις** πλευρές του μητρικού τριγώνου.



ΒΗΜΑ 2γ

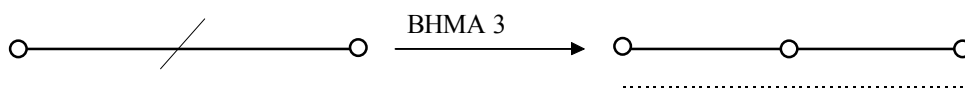
Μαρκάρισμα για εμπλουτισμό και των τριών πλευρών του μητρικού

Σε αυτό το σημείο, καλό θα ήταν να σημειωθεί πως δεν απαλείφονται ο μεσόκομβος και οι δύο αδερφές πλευρές γιατί, ούτως ή άλλως, θα χρειαστούν κατά τη γένεση των τριγώνων-παιδιών. Φανερό είναι πως τα βήματα 1 και 2 αλλάζουν την εικόνα του πλέγματος όσον αφορά τις μαρκαρισμένες πλευρές. Γι'αυτό απαιτείται μια επαναληπτική μέθοδος, που αποτελείται από τη

συνεχή εκτέλεση των βημάτων 1 και 2 μέχρι του σημείου όπου δεν εμφανίζονται νέα μαρκάρια. Όπως εύκολα διαπιστώνεται αυτή η επαναληπτική διαδικασία επιβάλλεται επειδή μια μαρκαρισμένη πλευρά μπορεί να παρασύρει σε σπάσιμο και άλλες πλευρές λόγω της εφαρμογής των κανόνων της προσαρμογής.

ΒΗΜΑ 3

Σε αυτή τη φάση, αφού έχει ολοκληρωθεί το μαρκάρισμα των πλευρών, πραγματοποιείται η διάσπασή τους. Εξάγονται από τις λίστες αναμονής δύο πλευρές και ένας κόμβος για κάθε μαρκαρισμένη πλευρά (εξαιρούνται οι πλευρές όπως αυτές του βήματος 2 που διατήρησαν το μεσόκομβό τους), τα οποία αμέσως ενεργοποιούνται και των οποίων οι πίνακες (γενεαλογικοί και τοπολογικοί) συμπληρώνονται.



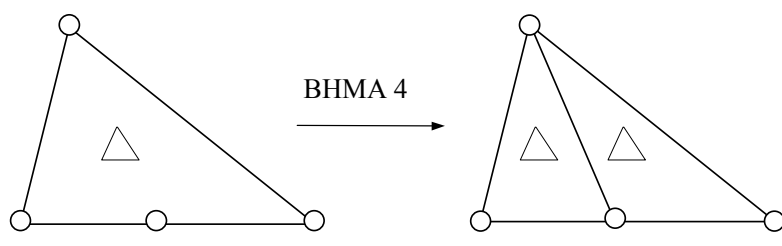
ΒΗΜΑ 3

Διάσπαση των μαρκαρισμένων πλευρών

Ο νέος κόμβος τοποθετείται στο γεωμετρικό μέσο της μητρικής πλευράς, εκτός εάν πρόκειται για οριακό σημείο οπότε οι συντεταγμένες του καθορίζονται με ακριβή παρεμβολή. Αυτό είναι απαραίτητο, ώστε να μην τροποποιείται η πραγματική γεωμετρία του χωρίου ροής. Η μη τήρηση της γεωμετρίας αυτής οδηγεί σε αποκλίσεις από την ακριβή λύση. Τέλος ορίζονται οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές του πεδίου στους νέους υπολογιστικούς κόμβους με αριθμητική παρεμβολή.

ΒΗΜΑ 4

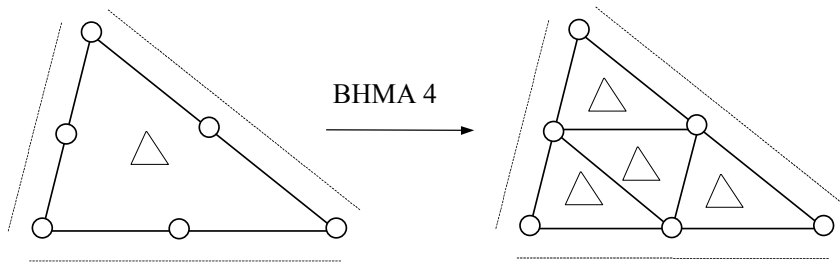
Αυτό που έχει απομείνει πλέον, για να τελειώσει η διαδικασία του εμπλουτισμού, είναι η δημιουργία των τριγώνων που πρόκειται να αντικαταστήσουν τα μητρικά. Αυτή συνίσταται στην εξαγωγή από τις λίστες αναμονής των ID των δύο ή τεσσάρων τριγώνων που θα σχηματιστούν, καθώς και των ID των εσωτερικών ακμών του μητρικού τριγώνου. Συγχρόνως καθορίζονται οι γενεαλογικές και τοπολογικές πληροφορίες των νέων στοιχείων που δημιουργούνται σε αυτό το βήμα, και ανανεώνονται οι γενεαλογικές πληροφορίες των στοιχείων που απενεργοποιούνται.



ΒΗΜΑ 4

Γένεση των νέων τριγώνων

ή

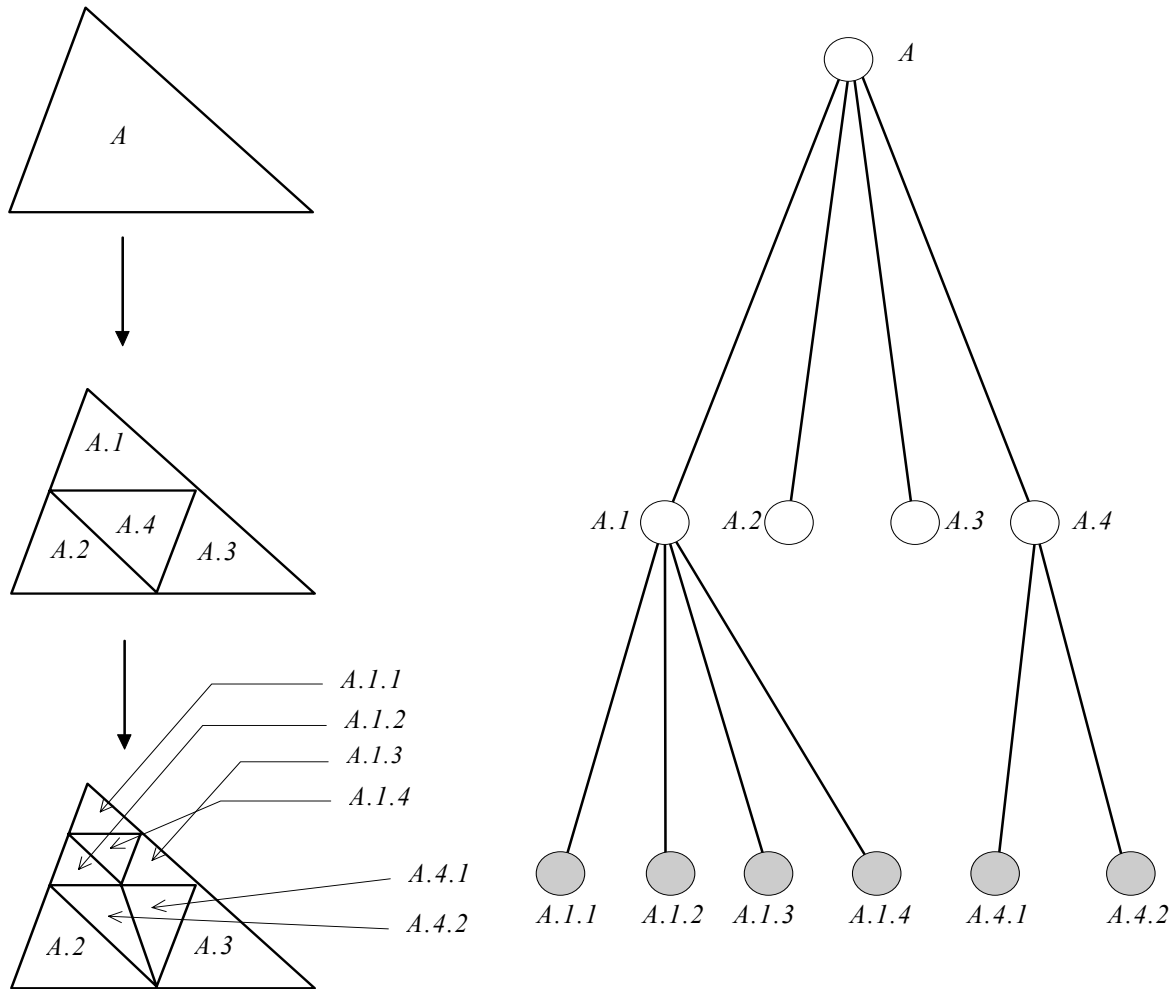


ΒΗΜΑ 4
Γένεση των νέων τριγώνων

Τη διαδικασία του εμπλουτισμού ακολουθεί αυτή του απεμπλουτισμού που περιγράφεται αμέσως παρακάτω.

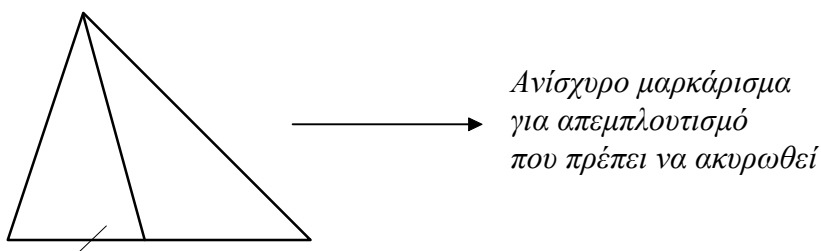
ΠΛ.6 Διαδικασία Απεμπλουτισμού

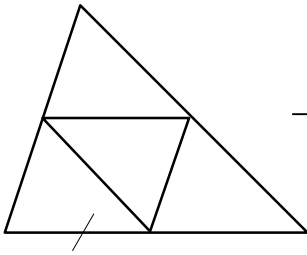
Κατά τον απεμπλουτισμό απαλείφονται περιττά (που έχουν χαρακτηριστεί ως τέτοια σύμφωνα με τα κριτήρια της προσαρμογής) στοιχεία που έχουν δημιουργηθεί σε προηγούμενη διαδικασία εμπλουτισμού. Ο αλγόριθμος του απεμπλουτισμού έχει τη δυνατότητα να απαλείφει στοιχεία μόνο από τρίγωνα των οποίων οι γεννήτορες δεν έχουν εγγόνια. Δηλαδή η απαλοιφή επιτρέπεται μόνο στα πιο πρόσφατα στοιχεία του “γενεαλογικού” δέντρου, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ο αλγόριθμος του απεμπλουτισμού επιτρέπεται να επέμβει μόνο στα στοιχεία των παραπάνω γραμμοσκιασμένων τριγώνων τελευταίας γενεάς (A.1.1, A.1.2, A.1.3, A.1.4, A.4.1 και A.4.2). Δηλαδή δεν επιτρέπεται αυτός να επέμβει στα τρίγωνα A.2 και A.3 τα οποία να μην είναι ενεργά αλλά των οποίων ο γεννήτορας A έχει απογόνους μεγαλύτερης τάξης, δηλαδή έχει και εγγόνα.

Αν και ο απεμπλουτισμός ενός πλέγματος μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη διαδικασία αυτής του εμπλουτισμού, παρουσιάζει μία σημαντική διαφορά από αυτόν. Έτσι το μαρκάρισμα για απεμπλουτισμό μιας πλευράς δεν έχει από μόνο του καθοριστική ισχύ να την αναγκάσει να “κολλήσει” με την αδερφή πλευρά της (αν υπάρχει) με στόχο την επανενεργοποίηση της μητρικής πλευράς. Αυτό είναι πιθανό μόνο εάν και η αδερφή πλευρά της είναι μαρκαρισμένη για απεμπλουτισμό.

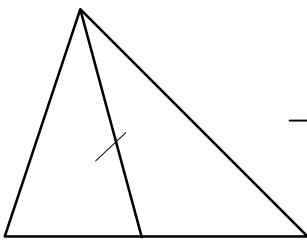




Ανίσχυρο μαρκάρισμα
για απεμπλουτισμό
που πρέπει να ακυρωθεί

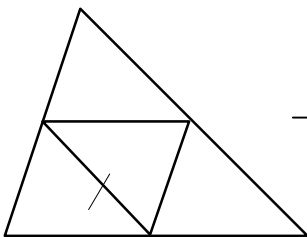
Παράδειγμα μαρκαρίσματος μιας μόνο από τις δύο αδερφές πλευρές μητρικού τριγώνου που θα ακυρωθεί και θα θεωρηθεί ως μη-γενόμενο

Ένα επιπλέον στοιχείο που χαρακτηρίζει τη διαδικασία απεμπλουτισμού είναι πως το μαρκάρισμα πλευρών που δεν έχουν προέλθει από σπάσιμο πλευράς προηγούμενης γενεάς (είναι, δηλαδή, εσωτερικές πλευρές μητρικού τριγώνου) δεν επηρεάζει τη διαδικασία του απεμπλουτισμού. Στα δύο σχήματα που ακολουθούν στις πλευρές που μαρκαρίστηκαν για απεμπλουτισμό, το μαρκάρισμα θα ακυρωθεί και θα θεωρηθεί ως μη-γενόμενο.



Ανίσχυρο μαρκάρισμα
για απεμπλουτισμό
που πρέπει να ακυρωθεί

Ανίσχυρο μαρκάρισμα εσωτερικής πλευράς μητρικού τριγώνου που θα ακυρωθεί και θα θεωρηθεί ως μη-γενόμενο

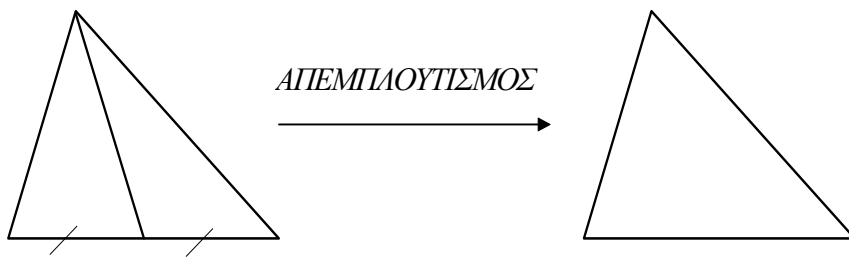


Ανίσχυρο μαρκάρισμα
για απεμπλουτισμό
που πρέπει να ακυρωθεί

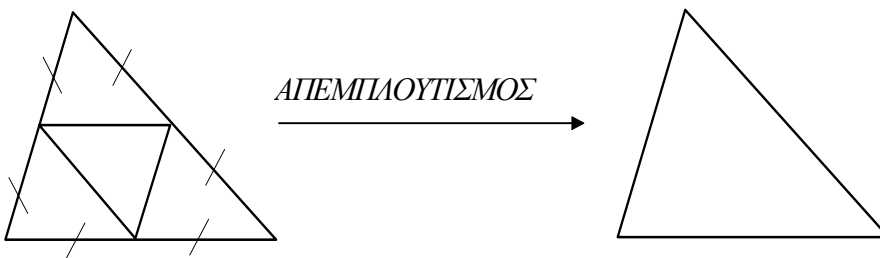
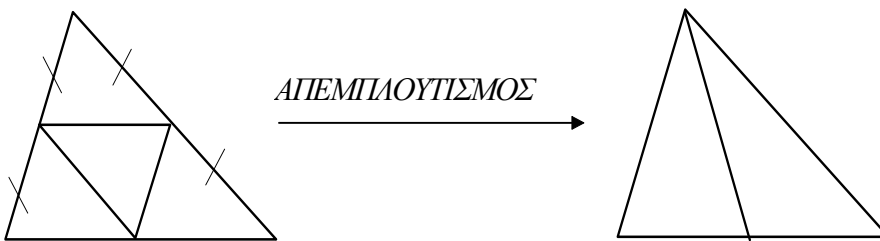
Ανίσχυρο μαρκάρισμα εσωτερικής πλευράς μητρικού τριγώνου που θα ακυρωθεί και θα θεωρηθεί ως μη-γενόμενο

Σύμφωνα και με τα παραπάνω μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε τις δύο μοναδικές περιπτώσεις κατά τις οποίες μπορούν να απαλειφθούν τρίγωνα.

α) περίπτωση δύο ενεργών τριγώνων που προέρχονται από τη διάσπαση του μητρικού τριγώνου αποκλειστικά στα δύο αυτά τρίγωνα και στα οποία είναι μαρκαρισμένες για απεμπλουτισμό οι δύο αδερφές πλευρές τους

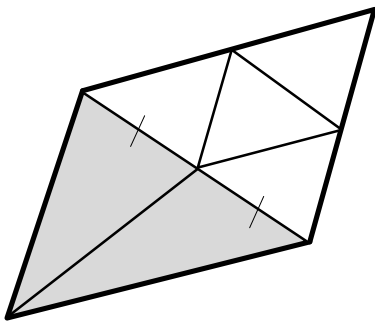


β) περίπτωση τεσσάρων ενεργών τριγώνων που προέρχονται από το ίδιο μητρικό και στα οποία έχουν μαρκκαριστεί για απεμπλουτισμό δύο τουλάχιστον ζεύγη αδερφών πλευρών.



Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που έχει μαρκκαριστεί για απεμπλουτισμό μόνο ένα ζεύγος αδερφών πλευρών, τότε το μαρκκάρισμα θα ακυρωθεί και θα θεωρηθεί ως μη γεγονός.

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τον απεμπλουτισμό, γίνεται φανερό πως η ύπαρξη προϋποθέσεων για απαλοιφή τριγώνων προς τα αντίστοιχα μητρικά δεν είναι αρκετή ώστε να παρασύρει σε απαλοιφή γειτονικά τρίγωνα, παρά μόνο αν και αυτά έχουν αντίστοιχες προϋποθέσεις για απεμπλουτισμό. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται μια τέτοια περίπτωση.



Ανίσχυρο μαρκάρισμα
για απεμπλουτισμό
που πρέπει να ακυρωθεί

Παράδειγμα αδυναμίας εκτέλεσης απεμπλουτισμού λόγω μη ύπαρξης προϋποθέσεων σε γειτονικό τρίγωνο. Δηλαδή αν και υπάρχουν οι προϋποθέσεις να επανενεργοποιηθεί το γραμμοσκιασμένο μητρικό τρίγωνο (είναι μαρκαρισμένες για απεμπλουτισμό οι δύο αδερφές πλευρές των απογόνων τριγώνων του) στο γειτονικό μη γραμμοσκιασμένο μητρικό τρίγωνο είναι μαρκαρισμένο για απεμπλουτισμό μόνο ένα ζεύγος αδερφών πλευρών του, οπότε αναγκαστικά το μαρκάρισμα αυτό πρέπει να θεωρηθεί άκυρο.

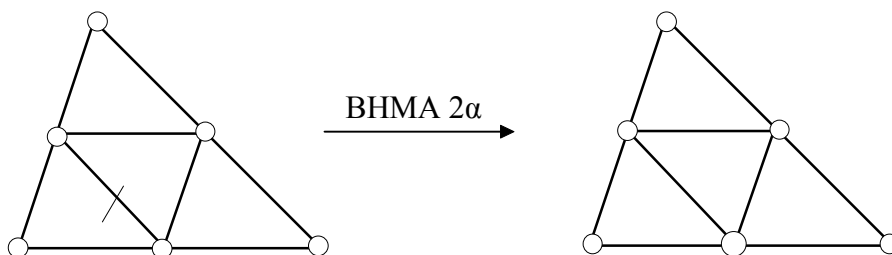
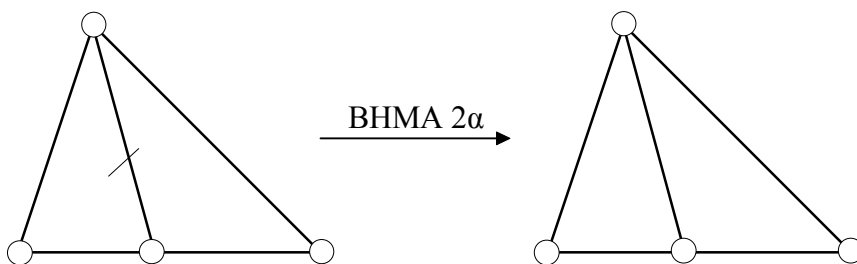
Τα συνιστώμενα βήματα κατά τον απεμπλουτισμό δίνονται παρακάτω:

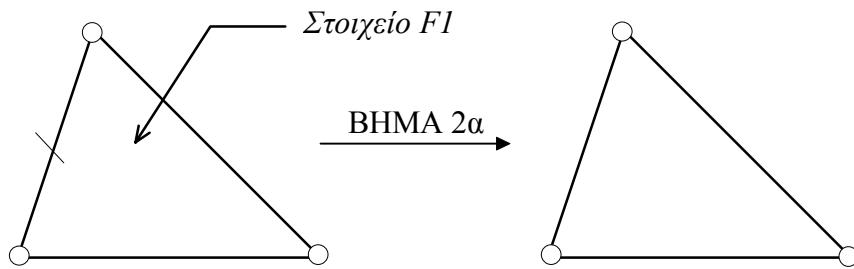
ΒΗΜΑ 1

Εντοπίζονται όλες οι ανενεργές πλευρές του πλέγματος, οποιασδήποτε γενεάς, και σημειώνονται ως στοιχεία που δεν πρόκειται να απαλειφθούν.

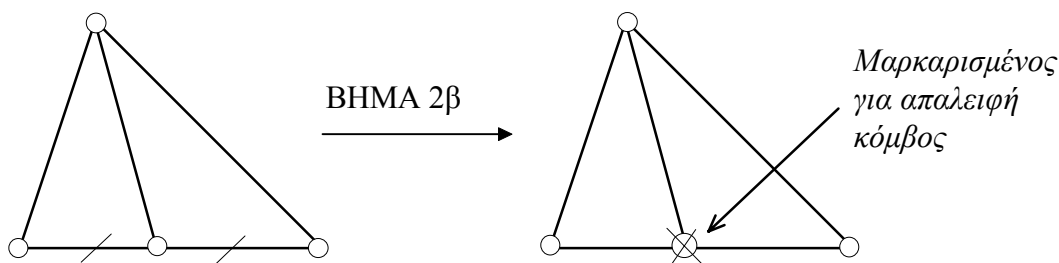
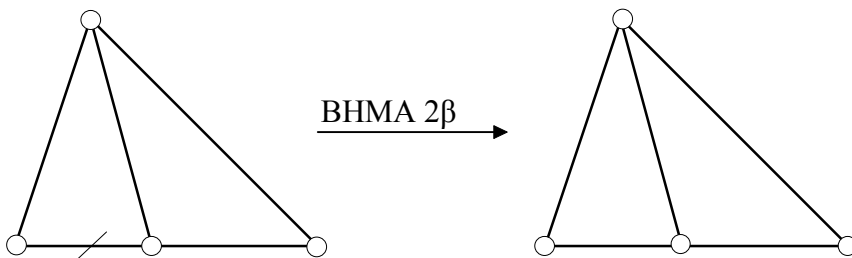
ΒΗΜΑ 2

α) Ξεμαρκάρονται τυχόν ατυχή μαρκάρισμα πλευρών του αρχικού πλέγματος (F1) και εσωτερικών πλευρών μητρικών τριγώνων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα απεικονίζονται στα σχήματα που ακολουθούν. Πρόκειται για μαρκάρισμα για απεμπλουτισμό που θα θεωρηθούν ως μη-γενόμενα.



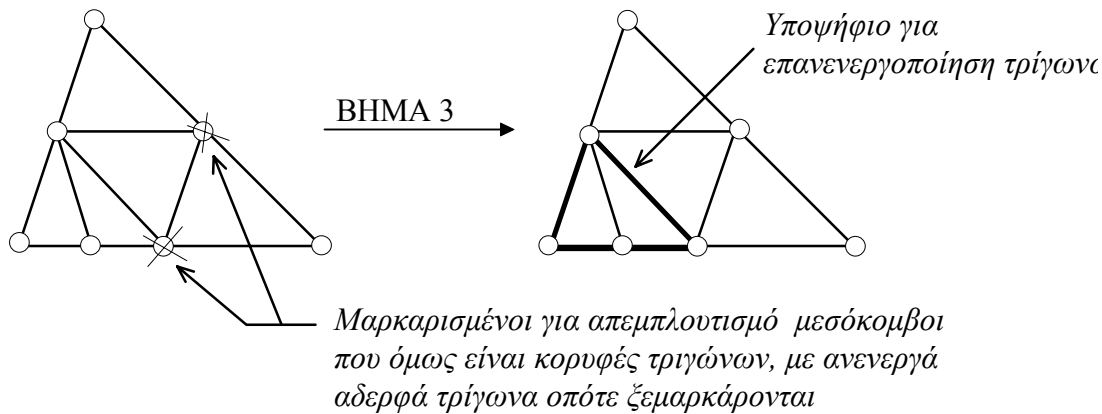


β) Στη περίπτωση που σαρώνοντας τις μαρκαρισμένες για απεμπλουτισμό πλευρές του πλέγματος βρεθεί κάποια μαρκαρισμένη της οποίας όμως η αδερφή πλευρά δεν είναι μαρκαρισμένη τότε ξεμαρκάρονται και οι δύο. Στην αντίθετη περίπτωση σημειώνεται για απαλοιφή ο μεσόκομβος της μητρικής πλευράς.



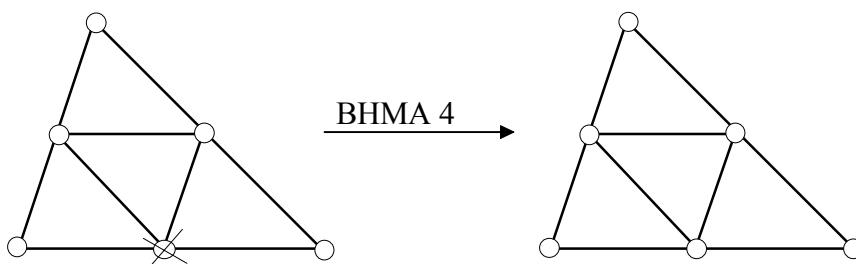
ΒΗΜΑ 3

Σημειώνονται τα υποψήφια για επανενεργοποίηση τρίγωνα και συγχρόνως ξεμαρκάρονται ατυχή μαρκαρίσματα μεσόκομβων των οποίων απαλοιφή θα αλλοίωνε τη μορφή του τυπικού μη-δομημένου πλέγματος και θα καταστρατηγούσε τη σειρά δημιουργίας των στοιχείων. Έτσι σαρώνοντας κάθε ανενεργό τρίγωνο, ξεμαρκάρονται όλες οι κορυφές του άσχετα με το αν είναι μαρκαρισμένες για απεμπλουτισμό ή όχι, αφού οι μόνες κορυφές που επιτρέπεται να απαλειφθούν είναι οι μεσόκομβοι ανενεργών πλευρών προτελευταίας γενεάς.. Αν τυχόν τα τρίγωνα αυτά έχουν και απόγονους δεύτερης γενεάς (εγγόνια) τότε ξεμαρκάρονται και οι κορυφές των παιδιών τριγώνων για τον ίδιο λόγο. Αν όμως δεν έχουν εγγόνια, άσχετα με τον αν έχουν μαρκαρισμένους για απαλοιφή μεσόκομβους, τότε τα τρίγωνα αυτά σημειώνονται ως υποψήφια για επανενεργοποίηση.



ΒΗΜΑ 4

Λαμβάνεται η τελική απόφαση για το σε ποια μητρικά τρίγωνα θα πραγματοποιηθούν αλλαγές στον αριθμό απογόνων τριγώνων. (απαλείφοντας φυσικά άλλα). Εδώ δε χρησιμοποιείται ο όρος επανενεργοποίηση γιατί είναι δυνατό σε ένα μητρικό τρίγωνο με τέσσερα απόγονα τρίγωνα να έχουν μαρκαριστεί δύο μεσόκομβοι για απεμπλουτισμό, οπότε το μητρικό τρίγωνο δεν πρόκειται να επανενεργοποιηθεί. Σε μια τέτοια περίπτωση, τα τέσσερα απόγονα τρίγωνα αντικαθίστανται από δύο νέα, όπως φαίνεται σε προηγούμενο σχήμα. Σε κάθε άλλη περίπτωση (μητρικό τρίγωνο με τέσσερα παιδιά και τρεις μαρκαρισμένους μεσόκομβους ή μητρικό τρίγωνο με δύο παιδιά και τον μεσόκομβο μαρκαρισμένο) το μητρικό τρίγωνο θα επανενεργοποιηθεί. Έτσι στη φάση αυτή σαρώνονται όλα τα υποψήφια για επανενεργοποίηση τριγώνων και σημειώνονται αυτά που έχουν έναν ή περισσότερους μαρκαρισμένους μεσόκομβους. Στην περίπτωση που ένα τρίγωνο έχει τέσσερα παιδιά και ένα μόνο μαρκαρισμένο για απαλοιφή μεσόκομβου, τότε αυτός ξεμαρκάρεται.



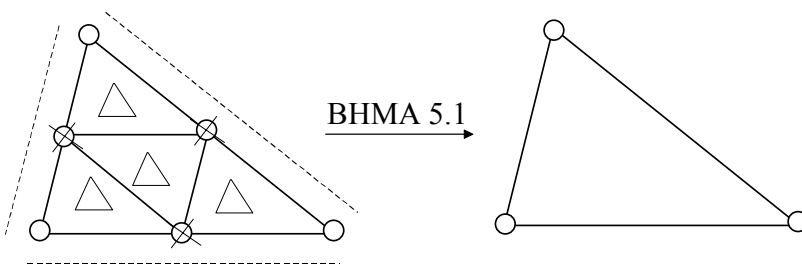
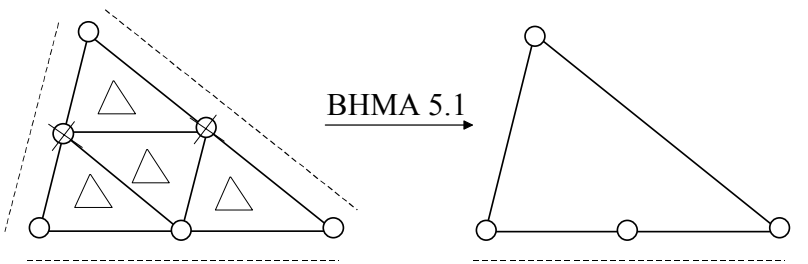
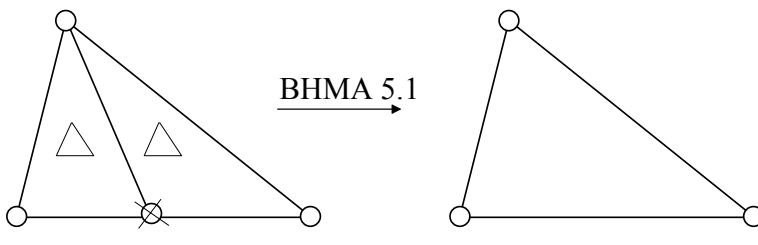
Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η διαδικασία πρέπει να γίνει επαναληπτικά. Δηλαδή κάθε φορά που σε αυτό το στάδιο ξεμαρκάριστεί έστω και ένας κόμβος θα πρέπει να ξανασαρωθούν όλα τα υποψήφια για επανενεργοποίηση τριγώνων γιατί υπάρχει η πιθανότητα να έχει σαρωθεί νωρίτερα γειτονικό τρίγωνο, λαμβάνοντας υπόψη τον κόμβο αυτό ως μαρκαρισμένο για απεμπλουτισμό. Η διαφορά με την επαναληπτική διαδικασία του εμπλουτισμού, είναι πως ενώ στον εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές παρέσυραν άλλες σε σπάσιμο, εδώ αμαρκάριστα τρίγωνα παρασύρουν σε ξεμαρκάρισμα άλλα.

Όταν τελικά τελειώσει η διαδικασία (όταν υπάρξει σάρωση κατά την οποία δε ξεμαρκάρεται εκ νέου κανένας κόμβος) έχουν πλέον μαρκαριστεί οριστικά όλα τα τρίγωνα που πρόκειται να επανενεργοποιηθούν καθώς και ο ακριβής τρόπος που θα γίνει αυτό, και επομένως είναι γνωστά τα τρίγωνα παιδιά τους που θα απαλειφθούν.

ΒΗΜΑ 5

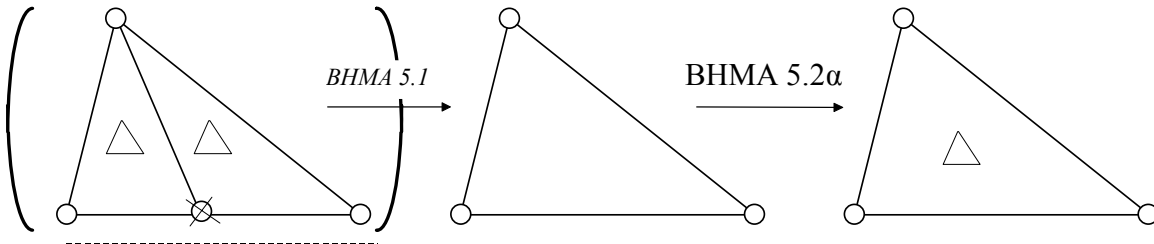
Γίνεται η απαλοιφή και επανενεργοποίηση των στοιχείων στην οποία έχει καταλήξει το βήμα 4.

(1) Καταρχή, απαλείφονται/εξουδετερώνονται οι απόγονοι των μαρκαρισμένων τριγώνων, οι εσωτερικές πλευρές και οι απόγονοι πλευρές των πλευρών με μαρκαρισμένο μεσόκομβο. Τέλος απαλείφονται και οι ίδιοι οι μεσόκομβοι και οι γενεαλογικές τους πληροφορίες, και εισάγονται στη λίστα αναμονής κατά τα γνωστά.

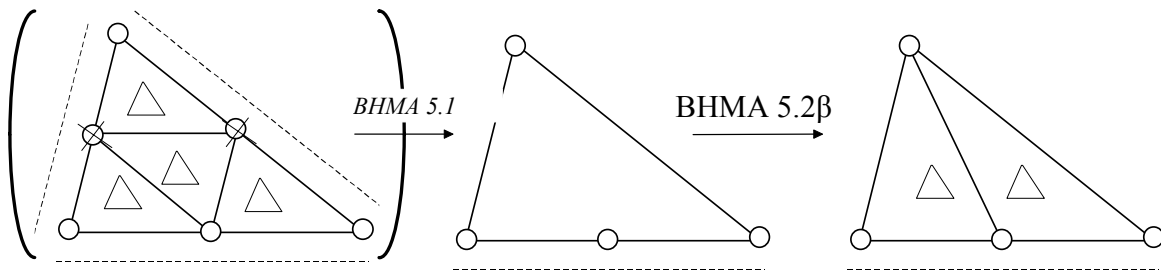


(2) Στη συνέχεια ο αλγόριθμος εργάζεται ανά περίπτωση:

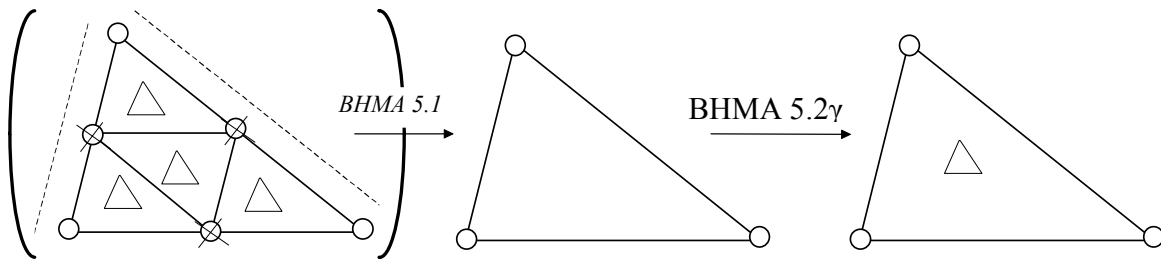
α) Μητρικά τρίγωνα με δύο παιδιά, που μόλις πριν απαλείφθηκαν. Στη περίπτωση αυτή απλώς ενεργοποιείται το μητρικό τρίγωνο.



β) Μητρικά τρίγωνα με τέσσερα παιδιά και δύο μαρκαρισμένους μεσόκομβους για απαλοιφή. Εξάγονται δύο νέα τρίγωνα και η κοινή τους πλευρά από τη λίστα αναμονής, συμπληρώνεται η γενεαλογική τους μήτρα και επανορίζεται αυτή του μητρικού τριγώνου.



γ) Μητρικά τρίγωνα με τέσσερα παιδιά και τρεις μαρκαρισμένους μεσόκομβους. Απλώς ενεργοποιείται το μητρικό τρίγωνο, όπως και στην περίπτωση (α).



ΠΛ.7 Επιλογή Κριτηρίων Προσαρμογής

Η επιλογή των κριτηρίων που θα χρησιμοποιηθούν για να ληφθούν αποφάσεις ως προς το ποιες περιοχές του υπολογιστικού πλέγματος πρέπει να υποστούν εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό, είναι πρωτεύουσας σημασίας για την επίτευξη μιας περισσότερο ακριβούς λύσης. Θυμίζουμε ότι το μαρκάρισμα για εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό λειτουργεί στις ακμές του πλέγματος. Το κεφάλαιο αυτό αναλύει και σχολιάζει τις παραμέτρους εκείνες που επηρεάζουν το μαρκάρισμα πλευρών για εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό. Όπως έχει αναφερθεί νωρίτερα, οι παράμετροι αυτοί συνίστανται από το **αισθητήριο**, τη **συνάρτηση κρίσης** και τα **κατώφλια** εμπλουτισμού και απεμπλουτισμού.

Συνοπτικά μπορούν να παρουσιαστούν ως εξής:

α) **Αισθητήριο.** Είναι μια φυσική ποσότητα (π.χ. πίεση, ταχύτητα, πυκνότητα, αριθμός Mach σε προβλήματα ροής) στην οποία θα εφαρμοστεί η συνάρτηση κρίσης. Σωστή επιλογή αισθητηρίου σημαίνει σωστή αντίληψη για το ποια (ή ποιες) φυσική ποσότητα είναι εκείνη που διαθέτει την απαραίτητη ευαισθησία ώστε να αντιλαμβάνεται περιοχές που απαιτούν αναπροσαρμογή του πλέγματος.

β) **Συνάρτηση κρίσης.** Όπως προαναφέρθηκε, αυτή εφαρμόζεται σε κάθε ακμή του πλέγματος. Χρησιμοποιώντας τις τιμές του αισθητηρίου στους δύο ακραίους κόμβους της(και ενδεχόμενα και σε άλλους γειτονικούς) “βαθμολογεί” την τάση προς εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό κάθε ακμής του πλέγματος.

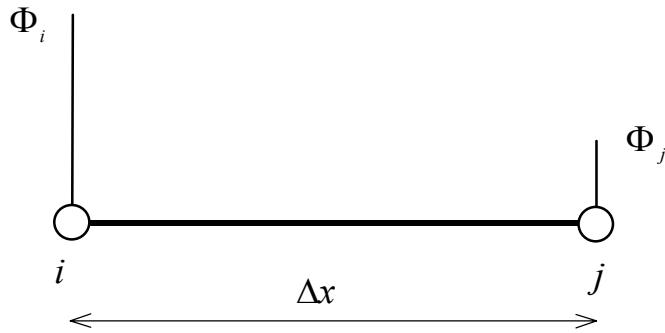
γ) **Κατώφλια.** Είναι δύο, το κατώφλι εμπλουτισμού και το κατώφλι απεμπλουτισμού. Με αυτά συγκρίνεται η “βαθμολογία” κάθε ακμής και αν είναι μεγαλύτερη του κατωφλίου εμπλουτισμού μαρκάρεται για εμπλουτισμό, ενώ αν είναι μικρότερη του κατωφλίου απεμπλουτισμού μαρκάρεται για απεμπλουτισμό. Η σχέση των δύο κατωφλίων είναι τέτοια ώστε να αποφεύγεται ο ατελείωτος εμπλουτισμός-απεμπλουτισμός κάθε ακμής.

Η λειτουργία των παραπάνω παραμέτρων είναι να επιτυγχάνεται το σωστό μαρκάρισμα ακμών του πλέγματος, για εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό. Πρέπει όμως να έχουμε υπόψη ότι το αν θα γίνει ή όχι αναπροσαρμογή του πλέγματος σε μια ακμή εξαρτάται από μια σύνθετη διαδικασία που ήδη παρουσιάστηκε προηγούμενα. Η ίδια σύνθετη διαδικασία είναι αυτή που αναγκάζει τον εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό ακμών, που δε μαρκαρίστηκαν στη φάση αυτή, με σκοπό τη διατήρηση της τυπικής μορφής ενός μη-δομημένου πλέγματος.

ΠΛ.8 Επιλογή Συνάρτησης Κρίσης

Η **συνάρτηση κρίσης** είναι η αναλυτική συνάρτηση που έχει για μεταβλητή την προεπιλεγείσα φυσική ποσότητα-αισθητήριο. Η τιμή της συνάρτησης αυτής, έτσι όπως υπολογίζεται πάνω σε κάθε ενεργό ακμή του πλέγματος, παρέχει μια αριθμητική ένδειξη της ανάγκης ή όχι να διασπαστεί η ακμή αυτή.

Ο βασικός διαχωρισμός των συναρτήσεων κρίσης που συναντώνται στη βιβλιογραφία έγκειται στο αν αυτές στηρίζονται στην απόλυτη ή τη σχετική ως προς το μήκος (δηλαδή τη χωρική παράγωγο) μεταβολή του μεγέθους. Για να μπορέσουν να γίνουν πιο εύκολα αντιληπτές οι διαφορές μεταξύ των δύο παραπάνω ειδών συναρτήσεων κρίσης θα αναπτυχθεί η αρχή τους σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ δύο κόμβων i και j . Ένα τέτοιο πρόβλημα φαίνεται σχηματικά παρακάτω:



Το αισθητήριο ας είναι η συνάρτηση Φ , οπότε η συνάρτηση κρίσης, σύμφωνα με τα παραπάνω μπορεί να βασίζεται:

(α) στην **απόλυτη** μεταβολή, όπως λ.χ.

$$|\Phi_i - \Phi_j| \quad (\text{ΠΛ.1})$$

ή σε αδιάστατα παράγωγά της,

(β) στη **σχετική** μεταβολή

$$\left| \frac{\Phi_i - \Phi_j}{\Delta x} \right| \sim \left| \frac{d\Phi}{dx} \right| \quad (\text{ΠΛ.2})$$

ή σε άλλες παρόμοιες αδιάστατες μορφές της. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές άλλες παραλλαγές συναρτήσεων κρίσης που βασίζονται στην χωρική παράγωγο. Ενδεικτικά αναφέρονται μερικές από αυτές:

$$f = 1 + \left| \frac{d\Phi}{dx} \right| \quad (\text{ΠΛ.3})$$

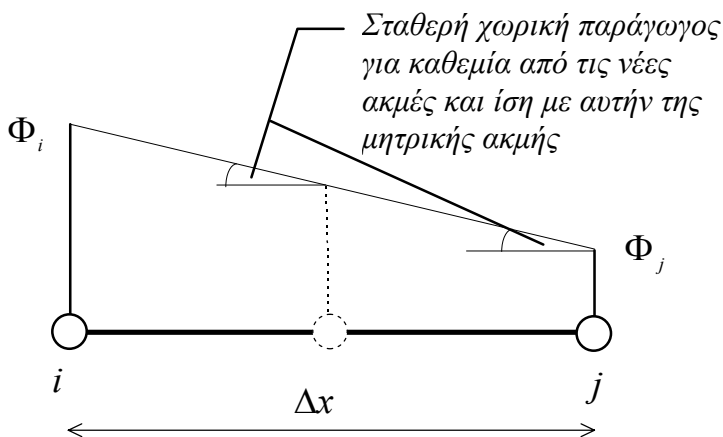
$$f = \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2} \quad (\text{ΠΛ.4})$$

$$f = \left| \frac{d\Phi}{dx} \right| + \beta \left| \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right|, \quad \text{όπου } \beta = \text{σταθερά} \quad (\text{ΠΛ.5})$$

Κάθε μία από τις παραπάνω εκφράσεις συμπεριφέρεται διαφορετικά και χρησιμοποιείται σε διαφορετικές περιπτώσεις.

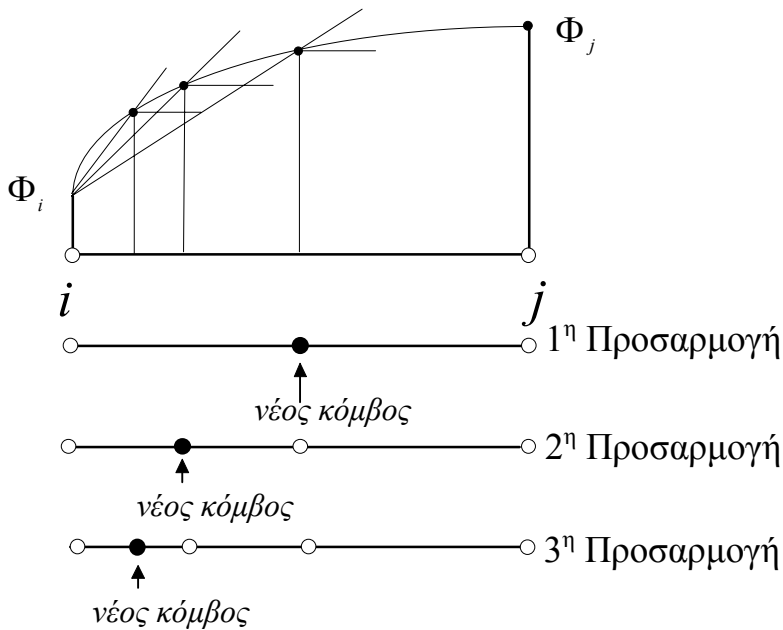
Η διαφοροποίηση μεταξύ των συναρτήσεων που στηρίζονται σε απόλυτες μεταβολές και σε συναρτήσεις που στηρίζονται σε χωρικές παραγώγους, αν και από πρώτη ματιά φαίνεται απλοϊκή, είναι από τα πιο σημαντικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν στην επιλογή συνάρτησης κρίσης. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές ιδιότητες τους.

Έτσι σε περίπτωση έντονης γραμμικής μεταβολής του αισθητηρίου (σταθερή κλίση) πάνω σε μια ακμή (που ορίζεται από τους κόμβους i και j), διάσπαση της δε θα οδηγήσει σε μεταβολή της τιμής της συνάρτησης κρίσης στις νέες ακμές όταν αυτή στηρίζεται σε χωρικές παραγώγους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επομένως ένα κριτήριο που βασίζεται στη σχετική μεταβολή του αισθητηρίου προτρέπει πάντοτε για τη συνέχιση της διάσπασης της ακμής, όσες διασπάσεις της και αν έχουν προηγηθεί.



Αντίθετα, η τιμή της απόλυτης μεταβολής του μεγέθους Φ μειώνεται στο μισό για καθεμία από τις δύο ακμές που προήλθε από τη διχοτόμηση της μητρικής ακμής.

Κατ'επέκταση της παραπάνω παρατήρησης μπορεί να ειπωθεί πως σε περίπτωση που η κατανομή του αισθητηρίου μεγέθους δεν είναι γραμμική (δεύτερη παράγωγος διάφορη του μηδενός), συναρτήσεις κρίσης που βασίζονται στη χωρική παράγωγο θα παίρνουν διαφορετικές τιμές για κάθε νέα ακμή που θα προέλθει από τη διάσπαση της μητρικής. Από αυτές η μία τιμή θα είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης της μητρικής, ενώ η άλλη μικρότερη, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εγκλωβίζεται ο εμπλουτισμός σε συγκεκριμένες ακμές. Η συμπεριφορά αυτή είναι άλλοτε επιθυμητή και άλλοτε όχι σε μια συνάρτηση κρίσης. Αν σε τέτοια περίπτωση χρησιμοποιηθεί συνάρτηση κρίσης που βασίζεται σε απόλυτες μεταβολές μεγεθών, οι τιμές που θα παίρνει στις νέες ακμές θα είναι μικρότερες της αντίστοιχης της μητρικής ακμής.

Σε πολλές περιπτώσεις συμφέρει η συνάρτηση κρίσης να είναι συνδυασμός πάνω από μιας συναρτήσεων κρίσης. Έτσι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η

$$f = \left| \frac{d\Phi}{dx} \right| + \beta \left| \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right|, \quad \text{όπου } \beta = \text{σταθερά} \quad (\text{ΠΛ.6})$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι όταν είναι δυνατόν είναι γενικά προτιμότερο να αδιαστατοποιούνται οι συναρτήσεις κρίσης, όπως λ.χ. στη μορφή

$$f = \frac{|\Phi_i - \Phi_j|}{|\Phi_i + \Phi_j|} \quad (\text{ΠΛ.7})$$

Η αδιαστατοποίηση αυτή βοηθάει στον εντοπισμό φαινομένων όπου οι τιμές του πεδίου (άρα και οι μεταβολές του) είναι μικρές, ενώ παράλληλα δημιουργείται μια κοινή βάση σύγκρισης καταφυγίων όπως θα φανεί στην αντίστοιχη παράγραφο. Ισχύει, βέβαια, η προηγούμενη παρατήρηση όσο αφορά τον κίνδυνο μηδενισμού του παρανομαστή και για το λόγο αυτό απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή. Ενδεικτικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η γραφή της συνάρτησης κρίσης ως:

$$f = \frac{|\Phi_i - \Phi_j|}{|\Phi_i + \Phi_j| + \varepsilon}, \text{ όπου } \varepsilon \text{ πολύ μικρή θετική σταθερά.}$$

Είναι πιθανό να θέλουμε να ενισχύσουμε ή να αποθαρρύνουμε τη διάσπαση μικρών ή μεγάλων ακμών του πλέγματος ανάλογα με τις απαιτήσεις που έχουμε από αυτό. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν **συναρτήσεις βαρύτητας** $g(l)$. Αυτές είναι συναρτήσεις με μεταβλητές το μήκος l της ακμής, και πολλαπλασιάζονται με την τιμή της συνάρτησης κρίσης:

$$f' = f \cdot g(l) = \left(1 + \left|\frac{d\Phi}{dx}\right|\right) \cdot g(l) \quad (\text{ΠΛ.8})$$

ΠΛ.9 Επίδραση Κατώφλιων Εμπλουτισμού και Απεμπλουτισμού

Τα κατώφλια εμπλουτισμού και απεμπλουτισμού είναι δύο χαρακτηριστικές τιμές της συνάρτησης κρίσης f , έστω f_1 για τον εμπλουτισμό και f_2 για τον απεμπλουτισμό. Στον αλγόριθμο προσαρμογής, που έχει περιγραφεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, μαρκάρονται για εμπλουτισμό οι πλευρές στις οποίες η συνάρτηση κρίσης παίρνει τιμές μεγαλύτερες της f_1 (κατώφλι εμπλουτισμού), ενώ για απεμπλουτισμό εκείνες στις οποίες η συνάρτηση κρίσης παίρνει τιμές μικρότερης της f_2 (κατώφλι απεμπλουτισμού).

Φανερό είναι πως μικρή τιμή της f_1 θα οδηγήσει σε μεγάλο αριθμό μαρκαρισμένων πλευρών, πράγμα που πιθανά θα οδηγήσει σε δημιουργία περιττών στοιχείων που επιβαρύνουν την μνήμη του υπολογιστή αλλά και θα αυξήσουν το χρόνο υπολογισμού. Από την άλλη πλευρά, μεγάλη τιμή της f_2 θα οδηγήσει σε μεγάλο αριθμό μαρκαρισμένων για απεμπλουτισμό πλευρών, που ίσως οδηγήσει στην απαλοιφή μεταξύ των άλλων και χρήσιμων στη λύση στοιχείων. Παρόλα αυτά, αυτή δε γίνεται τόσο αισθητή όσο η δημιουργία περιττών στοιχείων.

Μεγαλύτερο βάρος δίνεται στον σωστό προσδιορισμό της f_1 , ενώ η f_2 θεωρείται ένα προκαθορισμένο ποσοστό της f_1 . Μια ιδέα είναι η f_1 να υπολογίζεται με βάση στατιστικά μεγέθη της συνάρτησης f , ως

$$f_1 = \alpha \times f_{mean} + \beta \times f_{dev} \quad (\text{ΠΛ.8})$$

όπου f_{mean} η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης κρίσης ενώ f_{dev} η τυπική απόκλιση των τιμών της σε όλες τις ενεργές πλευρές του πλέγματος. Οι συντελεστές α και β δύο συντελεστές με τιμές ο

μεν πρώτος από 0 έως 1 (συνήθως 1) ενώ ο δεύτερος παίρνει τιμές από 0 έως 3. Επιθυμητό θα ήταν να μπορέσουν να οριστούν δύο σταθεροί συντελεστές α και β . Η δυσκολία σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι η κατανομή των τιμών της f αλλάζει όχι μόνο επιλέγοντας διαφορετική συνάρτηση κρίσης, αλλά και από την μια προσαρμογή στην επόμενη, οπότε είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη η εύρεση δύο σταθερών συντελεστών. Παρόλα υπάρχει και η δυνατότητα εξωτερικής επέμβασης στον ορισμό των κατωφλίων.

ΠΛ.10 Εφαρμογή της Προσαρμογής σε ένα Πρόβλημα Ροής Ρευστού

Ακολουθεί ένα παράδειγμα προσαρμογής σε ένα τυπικό πρόβλημα διηχητικής ροής ρευστού σε έναν αγωγό. Σχηματίζεται ένα κρουστικό κύμα, μια ασυνέχεια της πίεσης, όπου προκαλείται προσαρμογή του πλέγματος. Εξετάζοντας κανείς τις διαδοχικές εικόνες-φάσεις της προσαρμογής μπορεί να παρατηρήσει τη γένεση νέων τριγώνων που δημιουργούν μια έντονη τοπική πύκνωση, ενώ η ασυνέχεια εντοπίζεται πολύ σωστότερα (πιο λεπτό κύμα) καθώς το πλέγμα πυκνώνει.

