ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΓΕΝΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ
Κ.Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Επ. Καθηγητής, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΕΠ

ΓΕΝΕΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

ΕΠ.1 Το Πρόβλημα της Γένεσης Επιφανειακών Πλεγμάτων

Η γένεση επιφανειακών πλεγμάτων (δομημένων ή μη-δομημένων, κατά περίπτωση) αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση και το πρώτο βήμα για τη δημιουργία τριδιάστατων (αντίστοιχα, δομημένων ή μη-δομημένων) πλεγμάτων. Ο έλεγχος της ποιότητας του επιφανειακού πλέγματος είναι συνδεδεμένος με την ποιότητα του τριδιάστατου πλέγματος που θα δημιουργηθεί, επιλύοντας διαφορικές εξισώσεις γραμμένες για τον τριδιάστατο χώρο (αν πρόκειται για δομημένο πλέγμα) ή με κάποια τεχνική προελαύνοντος μετώπου/ κατά Delaunay τετραεδροποίησης (αν πρόκειται για μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων).

Η μέθοδος που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη γένεση επιφανειακών πλεγμάτων καθορίζεται πρωταρχικά από την επιλεγείσα ή τη διαθέσιμη μέθοδο περιγραφής της επιφάνειας, πάνω στην οποία θα δημιουργηθεί το πλέγμα. Για παράδειγμα, θα μπορούσε η επιφάνεια να περιγράφεται αναλυτικά με μια συνάρτηση της μορφής (ισοδύναμη είναι κάθε κυκλική εναλλαγή των συντεταγμένων στην παρακάτω σχέση)

$$z = z(x, y) \qquad \text{(ΕΠ.1)}$$

ή ακόμα γενικότερα ως

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \text{(ΕΠ.2)}$$

Στην περίπτωση αυτή, και με ιδιαίτερη προσοχή όταν η συντεταγμένη z δεν είναι μονότιμη συνάρτηση των συντεταγμένων x και y, μπορούν να διατυπωθούν (ανάλογες των επίπεδων προβλημάτων) διαφορικές εξισώσεις για τη γένεση του επιφανειακού πλέγματος. Οι εξισώσεις αυτές διατυπώνονται ως προς τις συντεταγμένες x και y και στη συνέχεια το επιφανειακό πλέγμα κατασκευάζεται εύκολα (ουσιαστικά υπολογίζεται η τρίτη συντεταγμένη) με τη βοήθεια της σχέσης (ΕΠ.1).

Άλλη περίπτωση, που συχνά μπορεί να συναντηθεί στην πράξη, είναι η επιφάνεια να περιγράφεται με ένα μη-δομημένο ή δομημένο πλέγμα (που δημιουργήθηκε λ.χ. με κάποιο λογισμικό τύπου Autocad) και ο χρήστης να καλείται να δημιουργήσει ένα άλλο πλέγμα της ίδιας ή και διαφορετικής κατηγορίας (δομημένο ή μη-δομημένο, αντίστοιχα) με συγκεκριμένες απαιτήσεις ως προς την ποιότητά του, συγκεκριμένο πλήθος πλεγματικών γραμμών, κ.λ.π.

Πριν αναλυθούν τεχνικές για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων θα παρουσιασθούν βασικά στοιχεία θεωρίας για τη διαχείριση και την παραμετροποίηση επιφανειών.

ΕΠ.2 Θεμελιώδεις Μορφές Επιφανειακού Δομημένου Πλέγματος

Έστω ότι δημιουργείται πάνω σε μια επιφάνεια ένα δομημένο πλέγμα. Ας είναι $\xi^i, i=1{,}2$ $(\xi^1=\xi, \xi^2=\eta)$ η παραμετροποίηση του επιφανειακού πλέγματος, όπως ακριβώς ήταν και στα επίπεδα πλέγματα. Θεωρούμε την ποσότητα Ι η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I &= d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}d\eta\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}d\eta\right) = \\ &= E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2 \end{aligned} \qquad \text{(ΕΠ.3)}$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης και

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta \qquad \text{(ΕΠ.4)}$$

$$G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta$$

Η συνάρτηση Ι ονομάζεται **πρώτη θεμελιώδης μορφή** (first fundamental form) της $\vec{r}=\vec{r}(\xi,\eta)$. Είναι μια ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς dξ και dη και οι συντελεστές E, F, G ονομάζονται **πρώτοι θεμελιώδεις συντελεστές** (first fundamental coefficients). Η σύγκριση των (ΕΠ.3) και (ΕΠ.4) με την εξίσωση (ΠΡ.13) και τις μέχρι τώρα γνώσεις για το συναλλοίωτο μετρικό τανυστή αποκαλύπτουν την προφανή αντιστοίχιση

$$E \leftrightarrow g_{11}, \qquad F \leftrightarrow g_{12}, \qquad G \leftrightarrow g_{22}$$

και για το λόγο αυτό μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (ΕΠ.3) ορισμού της ποσότητας I χρησιμοποιώντας τανυστική γραφή ως

$$I = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \qquad \text{(ΕΠ.3)}$$

Κατανοώντας το διάνυσμα $d\vec{r}$ ως μια στοιχειώδη διανυσματική ποσότητα πάνω στο επιφανειακό πλέγμα, που εκφράζει τη μετακίνηση από το σημείο $\vec{r}(\xi,\eta)$ στο $\vec{r}(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$, αναμένεται η ποσότητα I να είναι αναλλοίωτη, με την έννοια ότι δεν θα αλλάζει τιμή για οποιαδήποτε άλλη παραμετροποίηση της επιφάνειας. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε εύκολα ορίζοντας μιά διαφορετική παραμετροποίηση (θ,φ) αντί της (ξ,η), για την οποία η πρώτη θεμελιώδης μορφή ας είναι η $I^*(d\theta, d\phi)$. Κατά σειρά έχουμε

$$I^* = (\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi) =$$
$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta \right) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} d\eta \right) \right|^2 =$$
$$= \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\eta \right|^2 =$$
$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta \right|^2 = \left| d\vec{r} \right|^2 = I(d\xi, d\eta)$$

Η τελευταία σχέση πιστοποιεί το ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή του πλέγματος είναι αναλλοίωτη στην παραμετροποίηση. Ορίζοντας τους αντίστοιχους πρώτους θεμελιώδεις συντελεστές E^*, F^*, G^* και γράφοντας ότι

$$I^* = E^* d\theta^2 + 2F^* d\theta d\phi + G^* d\phi^2 \qquad \text{(ΕΠ.5)}$$

μπορούμε, αντίθετα, να δείξουμε ότι οι πρώτοι θεμελιώδεις συντελεστές δεν έχουν την ιδιότητα του αναλλοίωτου. Για το σκοπό αυτό, είναι εύκολο να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$E = E^*\theta_\xi^2 + 2F^*\theta_\xi\varphi_\xi + G^*\phi_\xi^2$$

$$F = E^*\theta_\xi\theta_\eta + F^*(\theta_\xi\phi_\eta + \phi_\xi\theta_\eta) + G^*\phi_\xi\phi_\eta \qquad (ΕΠ.6)$$

$$G = E^*\theta_\eta^2 + 2F^*\theta_\eta\phi_\eta + G^*\phi_\eta^2$$

που δείχνουν το μη-αναλλοίωτο των E, F, G στην αλλαγή του τρόπου παραμετροποίησης. Επίσης, σημειώνεται ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή I είναι θετικά ορισμένη. Είναι πάντα $I \geq 0$, με την περίπτωση της ισότητας να ισχύει αν και μόνο εάν $d\xi = d\eta = 0$.

Στο ίδιο επιφανειακό πλέγμα ορίζουμε σε κάθε σημείο του το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$ ως

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta}{\left|\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right|} = \frac{\vec{g}_1 \times \vec{g}_2}{\left|\vec{g}_1 \times \vec{g}_2\right|} \qquad (ΕΠ.7)$$

με το διαφορικό του να γράφεται ως

$$d\vec{N} = \vec{N}_\xi d\xi + \vec{N}_\eta d\eta \qquad (ΕΠ.8)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$d(\vec{N}\cdot\vec{N}) = 2d\vec{N}\cdot\vec{N} = d(1) = 0 \qquad (ΕΠ.9)$$

αποδεικνύεται η καθετότητα των $\vec{N}$ και $d\vec{N}$.

Θεωρούμε την ποσότητα II που ορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} II &= -d\vec{r}\cdot d\vec{N} = -(\vec{r}_\xi d\xi + \vec{r}_\eta d\eta)\cdot(\vec{N}_\xi d\xi + \vec{N}_\eta d\eta) = \\ &= -\vec{r}_\xi \vec{N}_\xi d\xi^2 - (\vec{r}_\xi \vec{N}_\eta + \vec{r}_\eta \vec{N}_\xi) d\xi d\eta - \vec{r}_\eta \vec{N}_\eta d\eta^2 = \\ &= L d\xi^2 + 2M d\xi d\eta + N d\eta^2 \end{aligned} \qquad (ΕΠ.10)$$

και η οποία θα ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** (second fundamental form) του επιφανειακού πλέγματος $\vec{r} = \vec{r}(\xi,\eta)$. Οι εμπλεκόμενοι συντελεστές (που για μελλοντική χρήση θα οριστούν με διπλό συμβολισμό, και ως συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή Ω_{ij})

$$L = \Omega_{11} = -\vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\xi$$

$$M = \Omega_{21} = \Omega_{12} = -\frac{1}{2}(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\eta + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\xi) \tag{ΕΠ.11}$$

$$N = \Omega_{22} = -\vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\eta$$

ονομάζονται **δεύτεροι θεμελιώδεις συντελεστές** (second fundamental coefficients). Η μορφή ΙΙ είναι ομογενής συνάρτηση δεύτερου βαθμού των dξ και dη, συνοπτικά θα γράφεται και ως

$$\mathrm{II} = \Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{ΕΠ.10}$$

και μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι και αυτή αναλλοίωτη (όπως και η Ι) για οποιαδήποτε άλλη παραμετροποίηση που διατηρεί όμως τη φορά του κάθετου διανύσματος $\vec{N}$. Για τους δεύτερους θεμελιώδεις συντελεστές δεν ισχύει το αναλλοίωτο κατά την αλλαγή παραμετροποίησης και ισχύει, σε αναλογία προς την (ΕΠ.6), η σχέση

$$L = L^*\theta_\xi^2 + 2M^*\theta_\xi\phi_\xi + N^*\phi_\xi^2$$

$$M = L^*\theta_\xi\theta_\eta + M^*(\phi_\xi\theta_\eta + \theta_\xi\phi_\eta) + N^*\phi_\xi\phi_\eta \tag{ΕΠ.12}$$

$$N = L^*\theta_\eta^2 + 2M^*\theta_\eta\phi_\eta + N^*\phi_\eta^2$$

Επειδή τα $\vec{r}_\xi$ και $\vec{r}_\eta$ είναι διανύσματα παράλληλα στην επιφάνεια και συνεπώς κάθετα στο διάνυσμα $\vec{N}$, σε κάθε σημείο (ξ,η), θα ισχύουν οι σχέσεις

$$(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N})_\xi = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = 0$$

$$(\vec{r}_\xi \cdot \vec{N})_\eta = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\eta = 0$$

$$(\vec{r}_\eta \cdot \vec{N})_\xi = \vec{r}_{\eta\xi} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = 0 \tag{ΕΠ.13}$$

$$(\vec{r}_\eta \cdot \vec{N})_\eta = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \vec{N} + \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\eta = 0$$

που επιτρέπουν την εναλλακτική έκφραση των L,M,N ως

$$L = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \overrightarrow{N}$$

$$M = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \overrightarrow{N} \qquad \text{(ΕΠ.14)}$$

$$N = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \overrightarrow{N}$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (ΕΠ.14) στη σχέση (ΕΠ.10) δίνει ότι

$$II = Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2 = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \overrightarrow{N} d\xi^2 + 2\vec{r}_{\xi\eta} \cdot \overrightarrow{N} d\xi d\eta + \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \overrightarrow{N} d\eta^2$$

ή τελικά ότι

$$II = d^2\vec{r} \cdot \overrightarrow{N} \qquad \text{(ΕΠ.15)}$$

όπου

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{\xi\xi} d\xi^2 + 2\vec{r}_{\xi\eta} d\xi d\eta + \vec{r}_{nn} d\eta^2$$

ή συνοπτικά

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{,ij} d\xi^i d\xi^j \qquad \text{(ΕΠ.16)}$$

όπου, στις τανυστικές γραφές, το κόμμα ως κάτω δείκτης θα σημαίνει παραγώγιση ως προς τις μεταβλητές που ακολουθούν (λ.χ. $\vec{r}_{,12} = \vec{r}_{\xi\eta}$).

Για να υπολογιστεί το εμβαδόν του επιφανειακού πλέγματος χρησιμοποιείται η σχέση ορισμού του

$$Area = \iint (\vec{r}_{\xi} \times \vec{r}_{\eta}) d\xi d\eta$$

και με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$Area = \iint \sqrt{EG - F^2}\, d\xi dn \qquad \text{(ΕΠ. 17)}$$

Στην τελευταία σχέση η υπόρριζος ποσότητα είναι πάντα θετική. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με βάση την ιδιότητα της θετικά ορισμένης μορφής I. Έτσι

$$I \geq 0 \Rightarrow \frac{I}{d\eta^2} \geq 0 \Rightarrow E(\frac{d\xi}{d\eta})^2 + 2F(\frac{d\xi}{d\eta}) + G \geq 0$$

που για να ισχύει πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο η ορίζουσα της, δηλαδή

$$4F^2 - 4EG < 0 \Rightarrow EG > F^2 \qquad \text{(ΕΠ.18)}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε απόλυτη συμφωνία με τη σχέση

$$EG - F^2 = \left(\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right) \cdot \left(\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right) = \left|\vec{r}_\xi \times \vec{r}_\eta\right|^2$$

και που πρακτικά καθορίζει τη λεγόμενη **επιφανειακή Ιακωβιανή** J (συχνά γράφεται και J_s) ως

$$J = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

ΕΠ.3 <u>Περί Καμπυλότητας</u>

Σε ένα σημείο P πάνω σε μια παραμετροποιημένη κατά (ξ,η) επιφάνεια (δηλαδή σε ένα επιφανειακό πλέγμα), ας είναι $\vec{k}$ το διάνυσμα της καμπυλότητας μιας καμπύλης C της επιφάνειας που διέρχεται από το P και $\vec{N}$ το τοπικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Θυμίζουμε ότι το **διάνυσμα καμπυλότητας** (curvature vector) μιας καμπύλης C ορίζεται ως η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος θέσης ως προς το μήκος τόξου της καμπύλης C

$$\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

Ονομάζουμε **διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας** (normal curvature vector) το $\vec{k}_n$ που ορίζεται ως

$$\vec{k}_n = (\vec{k} \cdot \vec{N})\vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.19)}$$

Παρατηρούμε ότι το $\vec{k}_n$ δεν εξαρτάται από τη φορά του $\vec{N}$. Η **κάθετη καμπυλότητα** κ_n σε ένα σημείο μιας καμπύλης σε μια επιφάνεια είναι το εσωτερικό γινόμενο (βαθμωτό μέγεθος)

$$\kappa_n = \vec{k} \cdot \vec{N} \tag{ΕΠ.20}$$

Αποδεικνύεται (για την απόδειξη παραπέμπουμε σε βιβλία Διαφορικής Γεωμετρίας) ότι ισχύει

$$\kappa_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2} = \frac{\Omega_{ij} d\xi^i d\xi^j}{g_{ij} d\xi^i d\xi^j} = \frac{II}{I} \tag{ΕΠ.21}$$

Η κάθετη καμπυλότητα εξαρτάται μόνο από την κλίση $d\xi / d\eta$ της καμπύλης και είναι αναλλοίωτη (με την έννοια που είναι αναλλοίωτα τα I και II) σε αλλαγές παραμετροποίησης που διατηρούν το πρόσημο του κάθετου διανύσματος $\vec{N}$. Επειδή το I είναι θετικά ορισμένο, η κάθετη καμπυλότητα κ_n διατηρεί το πρόσημο της ποσότητας II. Ονομάζουμε **κάθετη τομή** (normal section) της επιφάνειας την καμπύλη που σχηματίζεται από την τομή της επιφάνειας με ένα οποιοδήποτε επίπεδο που περιέχει το κάθετο διάνυσμα $\vec{N}$ στο σημείο P. Για το ίδιο σημείο P, μπορούμε να ορίσουμε μια απειρία τέτοιων κάθετων τομών. Κάθε κάθετη τομή έχει καμπυλότητα στο P που ταυτίζεται με την κύρια καμπυλότητα στο ίδιο σημείο.

Από το σημείο P της επιφάνειας διέρχονται δύο κάθετες τομές (με την έννοια που τους δώσαμε προηγούμενα), που αντιστοιχούν στη μικρότερη (κ_1) και τη μεγαλύτερη (κ_2) τιμή κύριας καμπυλότητας για το ίδιο σημείο. Αυτές οι δύο κάθετες τομές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες και ονομάζονται **πρωτεύουσες κατευθύνσεις** (principal directions), ενώ οι τιμές των κ_1 και κ_2 λέγονται **πρωτεύουσες καμπυλότητες** (principal curvatures). Οι πρωτεύουσες καμπυλότητες προκύπτουν ως οι δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (δίνεται χωρίς απόδειξη)

$$\left(EG - F^2\right)\kappa^2 - \left(EN + GL - 2FM\right)\kappa + \left(LN - M^2\right) = 0$$

Η μέση τιμή των δύο λύσεων ονομάζεται **μέση καμπυλότητα** (mean curvature) στο σημείο P

$$\mu = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} g^{ij} \Omega_{ij} \tag{ΕΠ.22}$$

ενώ το γινόμενό τους ονομάζεται **καμπυλότητα Gauss** (Gaussian curvature) στο ίδιο σημείο

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \tag{ΕΠ.23}$$

Η μέση καμπυλότητα και η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας είναι μια αναλλοίωτες ποσότητες σε σχέση με τους διάφορους τρόπους παραμετροποίησής της. Με βάση τη σχέση (ΕΠ.18), ο παρονομαστής της (ΕΠ.23) είναι θετικός και ως εκ τούτου το πρόσημο της καμπυλότητας Gauss είναι το πρόσημο της ποσότητας ($LN-M^2$).

ΕΠ.4 Θεωρία Επιφανειών. Το θεώρημα των Gauss-Weingarten

Οι εξισώσεις των Gauss-Weingarten για τις επιφάνειες είναι ανάλογες των εξισώσεων Frenet για τις καμπύλες. Οι εξισώσεις των Gauss-Weingarten εκφράζουν τις παραγώγους των διανυσμάτων $\vec{r}_\xi, \vec{r}_\eta$ και $\vec{N}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των ποσοτήτων αυτών (των $\vec{r}_\xi, \vec{r}_\eta$ και $\vec{N}$) με συντελεστές που εξαρτώνται από την πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή I και II αντίστοιχα. Επειδή τα $\vec{r}_\xi, \vec{r}_\eta$ και $\vec{N}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ισχύει

$$\vec{r}_{\xi\xi} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_\xi + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_\eta + a_{11} \vec{N}$$

$$\vec{r}_{\xi\eta} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_\xi + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_\eta + \alpha_{12} \vec{N}$$

$$\vec{r}_{\eta\eta} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_\xi + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_\eta + \alpha_{22} \vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.24)}$$

$$\vec{N}_\xi = \beta_1^1 \vec{r}_\xi + \beta_1^2 \vec{r}_\eta + \gamma_1 \vec{N}$$

$$\vec{N}_\eta = \beta_2^1 \vec{r}_\xi + \beta_2^2 \vec{r}_\eta + \gamma_2 \vec{N}$$

όπου απομένει να υπολογιστούν οι συντελεστές $\Gamma_{ij}^k, a_{ij}, \beta_i^j$ και γ_i. Οι παραπάνω εξισώσεις ξαναγράφονται τανυστικά ως

$$\vec{r}_{,ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{,k} + a_{ij} \vec{N}$$

$$\vec{N}_{,i} = \beta_i^j \vec{r}_{,j} + \gamma_i \vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.24)}$$

Για λόγους απλότητας, οι αποδείξεις που ακολουθούν δίνονται σε πλήρη ανάπτυξη, αντί σε τανυστική μορφή. Επειδή το διάνυσμα $\vec{N}$ είναι μοναδιαίο και ορθογώνιο ως προς τα $\vec{N}_\xi$ και $\vec{N}_\eta$, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{N}_\xi \cdot \vec{N} = \beta_1^1 \vec{r}_\xi \cdot \vec{N} + \beta_1^2 \vec{r}_\eta \cdot \vec{N} + \gamma_1 \vec{N} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{N}_\eta \cdot \vec{N} = \beta_2^1 \vec{r}_\xi \cdot \vec{N} + \beta_2^2 \vec{r}_\eta \cdot \vec{N} + \gamma_2 \vec{N} \cdot \vec{N} = 0$$

Αλλά $\vec{r}_\xi \cdot \vec{N} = 0$, $\vec{r}_\eta \cdot \vec{N} = 0$ και $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ οπότε καταλήγουμε στο μηδενισμό των γ_1 και γ_2, δηλαδή

$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (ΕΠ.11) και (ΕΠ.13) έχουμε

$$-L = \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\xi = \beta_1^1 \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi + \beta_1^2 \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = \beta_1^1 E + \beta_1^2 F$$

$$-M = \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\xi = \beta_1^1 \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\xi + \beta_1^2 \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta = \beta_1^1 E + \beta_1^2 G$$

$$-M = \vec{r}_\xi \cdot \vec{N}_\eta = \beta_2^1 \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\xi + \beta_2^2 \vec{r}_\xi \cdot \vec{r}_\eta = \beta_2^1 F + \beta_2^2 F$$

$$-N = \vec{r}_\eta \cdot \vec{N}_\eta = \beta_2^1 \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\xi + \beta_2^2 \vec{r}_\eta \cdot \vec{r}_\eta = \beta_2^1 F + \beta_2^2 G$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν δυο συστήματα με δυο εξισώσεις το καθένα και αγνώστους τα β_1^1, β_1^2 (οι πρώτες δύο εξισώσεις) και τα $\beta_{2,}^1 \beta_2^2$ (οι δύο τελευταίες). Επιλύοντας τα συστήματα προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\beta_1^1 = \frac{MF - LG}{EG - F^2}$$

$$\beta_1^2 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}$$

$$\beta_2^1 = \frac{NF - MG}{EG - F^2} \qquad \text{(ΕΠ.25)}$$

$$\beta_2^2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2}$$

Οι παραπάνω σχέσεις διατυπώνονται σύντομα και στη μορφή

$$\beta_j^k = -\Omega_{ij} g^{ik} \qquad \text{(ΕΠ.25)}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (ΕΠ.14) έχουμε

$$L = \vec{r}_{\xi\xi} \cdot \vec{N} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_\xi \cdot \vec{N} + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_\eta \cdot \vec{N} + \alpha_{11} \vec{N} \cdot \vec{N} = \alpha_{11}$$

$$M = \vec{r}_{\xi\eta} \cdot \overrightarrow{N} = \Gamma_{12}^{1}\vec{r}_{\xi} \cdot \overrightarrow{N} + \Gamma_{12}^{2}\vec{r} \cdot \overrightarrow{N} + \alpha_{12}\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{N} = \alpha_{12}$$

$$N = \vec{r}_{\eta\eta} \cdot \overrightarrow{N} = \Gamma_{22}^{1}\vec{r}_{\xi} \cdot \overrightarrow{N} + \Gamma_{22}^{2}\vec{r}_{\eta} \cdot \overrightarrow{N} + \alpha_{22}\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{N} = \alpha_{22}$$

καταλήγοντας στον υπολογισμό των α_{ij} ως

$$\alpha_{11} = L \qquad \alpha_{12} = M \qquad \alpha_{22} = N \tag{ΕΠ.26}$$

δηλαδή ότι

$$a_{ij} = \Omega_{ij} \tag{ΕΠ.26}$$

Τέλος, χωρίς απόδειξη, παραθέτουμε την έκφραση των συντελεστών Γ_{ij}^{k} ως

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_{\xi} - 2FF_{\xi} + FE_{\eta}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_{\eta} - FG_{\xi}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_{\eta} - GG_{\xi} - FG_{\eta}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_{\xi} - EE_{\eta} + FE_{\xi}}{2(EG - F^{2})} \tag{ΕΠ.27}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_{\xi} - FE_{\eta}}{2(EG - F^{2})}$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_{\eta} - 2FF_{\eta} + FG_{\xi}}{2(EG - F^{2})}$$

ή συνοπτικά ως

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\delta}\left(g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}\right) \tag{ΕΠ.27}$$

Αντικαθιστώντας στις (ΕΠ.23) έχουμε τις τρείς εξισώσεις Gauss στη μορφή

$$\vec{r}_{\xi\xi} = \Gamma_{11}^{1}\vec{r}_{\xi} + \Gamma_{11}^{2}\vec{r}_{\eta} + L\overrightarrow{N}$$

$$\vec{r}_{\xi\eta} = \Gamma^1_{12}\vec{r}_\xi + \Gamma^2_{12}\vec{r}_\eta + M\vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.28)}$$

$$\vec{r}_{\eta\eta} = \Gamma^1_{22}\vec{r}_\xi + \Gamma^2_{22}\vec{r}_\eta + N\vec{N}$$

ή

$$\vec{r}_{,ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_{,k} + \Omega_{ij}\vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.28)}$$

και τις δύο εξισώσεις Weingarten στη μορφή

$$\vec{N}_\xi = \beta^1_1\vec{r}_\xi + \beta^2_1\vec{r}_\eta$$

$$\vec{N}_\eta = \beta^1_2\vec{r}_\xi + \beta^2_2\vec{r}_\eta \qquad \text{(ΕΠ.29)}$$

ή

$$\vec{N}_{,i} = b^j_i\vec{r}_{,j} = b^j_i\vec{g}_j \qquad \text{(ΕΠ.29)}$$

Οι ποσότητες Γ^k_{ij} λέγονται **επιφανειακά σύμβολα Christoffel δεύτερου είδους**. Οπως παρατηρούμε από τις εκφράσεις (ΕΠ.27), τα σύμβολα Christoffel εξαρτώνται μόνο από τους πρώτους θεμελιώδεις συντελεστές E, F, G και τις παραγώγους τους, σε αντίθεση με τις ποσότητες β^j_i που εξαρτώνται από τους πρώτους και τους δεύτερους θεμελιώδεις συντελεστές. Ισχύει δε εξ' ορισμού ότι

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \qquad \text{(ΕΠ.30)}$$

ΕΠ.5 Εξισώσεις Συμβιβαστότητας και το θεώρημα του Gauss

Κάθε φορά που μας δίνονται πεδία των E, F, G, L, M, N (δηλαδή τα g_{ij} και τα Ω^{ij}) διατυπώνεται εύλογα το ερώτημα αν αυτά αντιστοιχούν σε μια επιφάνεια $\vec{r} = \vec{r}(\xi,\eta)$, με την έννοια του να αποτελούν τους πρώτους και τους δεύτερους θεμελιώδεις συντελεστές της. Γενικά, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρνητική, εκτός αν ικανοποιούνται οι λεγόμενες **εξισώσεις συμβιβαστότητας** (compatibility conditions), δηλαδή οι εξισώσεις

$$(\vec{r}_\xi)_{\xi\eta} = (\vec{r}_\xi)_{\eta\xi}$$

$$(\vec{r}_\eta)_{\xi\eta} = (\vec{r}_\eta)_{\eta\xi} \qquad \text{(ΕΠ.31)}$$

Αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις (ΕΠ.31), με την εκτέλεση πράξεων που παραλείπονται, ισοδυναμούν (αναγκαία και ικανή συνθήκη) με την απαίτηση οι πρώτοι και δεύτεροι θεμελιώδεις συντελεστές να ικανοποιούν τις (λεγόμενες και πάλι) **εξισώσεις συμβιβαστότητας** (compatibility equations)

$$L_\eta - \mathrm{M}_\xi = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2$$

$$M_\eta - N_\xi = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \qquad \text{(ΕΠ.32)}$$

και

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= F\left\{(\Gamma_{22}^2)_\xi - (\Gamma_{12}^2)_\eta + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\right\} + \\ &+ E\left\{(\Gamma_{22}^1)_\xi - (\Gamma_{12}^1)_\eta + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1\right\} \end{aligned} \qquad \text{(ΕΠ.33)}$$

Οι εξισώσεις (ΕΠ.32) είναι γνωστές και ως **εξισώσεις των Mainardi-Codazzi**. Η (ΕΠ.32) λέγεται συνήθως και απλά εξίσωση του Codazzi και τανυστικά γράφεται ως

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \Omega_{\kappa\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa \Omega_{\kappa\beta} = \left(\Omega_{\alpha\gamma}\right)_{,\beta} - \left(\Omega_{\alpha\beta}\right)_{,\gamma} \qquad \text{(ΕΠ.32)}$$

και, για μια επιφάνεια αντιστοιχεί μόνο σε δύο διακριτές εξισώσεις, αυτές που προκύπτουν για τις τιμές

$(\alpha, \beta, \gamma) = (1,1,2)$ και $(\alpha, \beta, \gamma) = (2,2,1)$

Η εξίσωση (ΕΠ.33) λέγεται συχνά και εξίσωση του Gauss και τανυστικά γράφεται ως

$$R_{\alpha\gamma\beta}^\kappa = g^{\lambda\kappa}\left(\Omega_{\gamma\lambda}\Omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\beta\lambda}\Omega_{\alpha\gamma}\right) \qquad \text{(ΕΠ.33)}$$

όπου ορίσθηκαν τα σύμβολα Riemann-Christoffel $R_{\alpha\gamma\beta}^\kappa$ ως

$$R_{\alpha\gamma\beta}^\delta = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\delta + \Gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon\Gamma_{\varepsilon\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon\Gamma_{\varepsilon\beta}^\delta \qquad \text{(ΕΠ.34)}$$

Η εξίσωση (ΕΠ.33) έχει δίνει τέσσερις διακριτές εξισώσεις, για

$(\kappa, \alpha, \beta, \gamma) = (1,1,2,1)$, $(\kappa, \alpha, \beta, \gamma) = (1,2,2,1)$

$(\kappa, \alpha, \beta, \gamma) = (2,1,2,1)$ και $(\kappa, \alpha, \beta, \gamma) = (2,2,2,1)$

και έχουν ειδική σημασία. Υπενθυμίζεται ότι τα Γ_{ij}^{k} είναι συναρτήσεις των E, F, G και των παραγώγων τους. Άρα, από τις ίδιες ποσότητες εξαρτάται και η ποσότητα $LN - M^2$. Η καμπυλότητα Gauss δίνεται από τη σχέση (ΕΠ.22) και ενώ μοιάζει να εξαρτάται από τους πρώτους και τους δεύτερους θεμελιώδεις συντελεστές όπως προκύπτει τώρα εξαρτάται μόνο από τους E,F,G και τις παραγώγους τους. Το τελευταίο συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά τη γένεση επιφανειακών πλεγμάτων.

ΕΠ.6 <u>Ελλειπτικές Διατυπώσεις για τη Γένεση Δομημένων Επιφανειακών Πλεγμάτων</u>

Ας συμβολίσουμε με $\nabla_s^2\ (\ \ )$ τον **επιφανειακό τελεστή Laplace,** γνωστό και ως **τελεστή Beltrami** (ο δείκτης s-surface δείχνει ακριβώς ότι πρόκειται για τελεστή διατυπωμένο σε μια επιφάνεια). Θα ισχύει, όπως για την περίπτωση που ο τελεστής γράφεται σε ένα επίπεδο διδιάστατο χωρίο, (πάλι κάθε δείκτης παίρνει τις τιμές 1 και 2) ότι

$$\nabla_s^2(\bullet) = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J g^{ij} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi^j} \right) \tag{ΕΠ.35}$$

Με εφαρμογή της (ΕΠ.35) στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ξ^δ, i=1,2 προκύπτει ότι

$$\nabla_s^2 \xi^\delta = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J g^{ij} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \xi^j} \right) = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J g^{i\delta} \right) = \frac{\partial g^{i\delta}}{\partial \xi^i} + \frac{g^{i\delta}}{J}\frac{\partial J}{\partial \xi^i} \tag{ΕΠ.36}$$

Για την περαιτέρω επεξεργασία της τελευταίας σχέσης δίνονται, χωρίς απόδειξη, δύο βοηθητικές σχέσεις για τις παραγώγους των ανταλλοίωτων μετρικών και της ορίζουσας J. Αυτές είναι οι

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi^\kappa} = -g^{\alpha j}\Gamma_{\alpha\kappa}^{i} - g^{\alpha i}\Gamma_{\alpha\kappa}^{j} \tag{ΕΠ.37}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi^i} = J\Gamma_{ji}^{j} \tag{ΕΠ.38}$$

Αντικαθιστώντας στην (ΕΠ.36) προκύπτει ότι

$$\nabla_s^2 \xi^\delta = -g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \tag{ΕΠ.39}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (ΕΠ.28) του Gauss με g^{ij} και προκύπτει η

$$g^{ij}\vec{r}_{,ij} = g^{ij}\Gamma^k_{ij}\vec{r}_{,k} + g^{ij}\Omega_{ij}\vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.40)}$$

που, με τη βοήθεια της εκφρασης (ΕΠ.22) για τη μέση καμπυλότητα, δίνει

$$g^{ij}\vec{r}_{,ij} - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\vec{r}_{,k} = 2\mu\vec{N} \qquad \text{(ΕΠ.41)}$$

Παράλληλα, με εφαρμογή της (ΕΠ.35) στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ προκύπτει ότι

$$\nabla^2_s\vec{r} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(Jg^{ij}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^j}\right) = g^{ij}\vec{r}_{,ij} + \frac{1}{J}\frac{\partial\left(Jg^{ij}\right)}{\partial\xi^i}\vec{r}_{,j}$$

ή ότι

$$\nabla^2_s\vec{r} = g^{ij}\vec{r}_{,ij} + \nabla^2_s\xi^j\vec{r}_{,j} \qquad \text{(ΕΠ.42)}$$

ή ακόμα (με βάση την εξίσωση (ΕΠ.39)) ότι

$$\nabla^2_s\vec{r} = g^{ij}\vec{r}_{,ij} - g^{\alpha\beta}\Gamma^j_{\alpha\beta}\vec{r}_{,j} \qquad \text{(ΕΠ.43)}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (ΕΠ.41) και (ΕΠ.43) προκύπτει και η εναλλακτική γραφή

$$\nabla^2_s\vec{r} = 2\mu\vec{\mathrm{N}} \qquad \text{(ΕΠ.44)}$$

Οι εξισώσεις (ΕΠ.41) ή (ΕΠ.43) ή (ΕΠ.44) είναι εναλλακτικές μορφές της βασικής διαφορικής εξίσωσης που διέπει τη γένεση επιφανειακών δομημένων πλεγμάτων, αφού τόσο η μέση καμπυλότητα όσο και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα (άρα το δεξιό μέλος στο σύνολό του) είναι αναλλοίωτα από την παραμετροποίηση της επιφάνειας.

Η γένεση του επιφανειακού πλέγματος μπορεί να έχει ως αφετηρία τις δύο εξισώσεις Poisson (με όρους πηγής f^1 και f^2) για τις δύο καμπυλόγραμμες συντεταγμένες της επιφάνειας ξ και η, ή ξ^1 και ξ^2 που γράφονται παρακάτω

$$\nabla^2_s\xi^\delta = f^\delta \qquad \text{(ΕΠ.45)}$$

που, με το συνδυασμό των σχέσεων (ΕΠ.42) και (ΕΠ.44) δίνουν την

$$g^{ij}\vec{r}_{,ij} + f^{j}\vec{r}_{,j} = 2\mu\vec{N} \tag{ΕΠ.46}$$

Η τελευταία εξίσωση αναπαριστά τρεις διακριτές εξισώσεις για τις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) των κόμβων του πλέγματος.

Για λόγους πληρότητας υπενθυμίζονται οι μετασχηματισμοί

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{J^2} = \frac{G}{EG - F^2}$$

$$g^{12} = \frac{-g_{12}}{J^2} = \frac{-F}{EG - F^2} \tag{ΕΠ.47}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{J_2} = \frac{E}{EG - F^2}$$