ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Γιά την $A\vec{u} = \vec{f}$: όταν $A = D - L - U$

- **ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI :** $\vec{v}^{n+1} = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{Jacobi iteration matrix}}\vec{v}^{n} + D^{-1}\vec{f}$

$$G_J = D^{-1}(L+U)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}^{n+1} = G_J\vec{v}^{n} + D^{-1}f}$$

- **ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI ΜΕ ΧΑΛΑΡΩΣΗ:**

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}^{*} &= G_J\vec{v}^{n} + D^{-1}\vec{f} \\ \vec{v}^{n+1} &= \omega\vec{v}^{*} + (1-\omega)\vec{v}^{n} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{v}^{n+1} = \underbrace{\left[(1-\omega)I + \omega G_J\right]}_{G_{J\omega} = (1-\omega)I + \omega G_J}\vec{v}^{n} + \omega D^{-1}\vec{f}}$$

σε ΔΕΛΤΑ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ:

$$\vec{v}^{n+1} = (1-\omega)\vec{v}^{n} + \omega D^{-1}\left[(L+U)\vec{v}^{n} + \vec{f}\right] = \vec{v}^{n} + \omega D^{-1}\left[\underbrace{(-D+L+U)\vec{v}^{n} + \vec{f}}_{r^{n}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^{n} + \omega D^{-1}\vec{r}^{n}}$$

• ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL:

$$(D-L)\vec{v}^{n+1} = U\vec{v}^{n} + \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}^{n+1} = (D-L)^{-1}U\vec{v}^{n} + (D-L)^{-1}\vec{f}}$$

• ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL ΜΕ ΧΑΛΑΡΩΣΗ:

Γράψτε το μόνοι σας!!!

• ΣΧΟΛΙΑ:

- ΤΙ ΚΑΝΩ ΜΕ ΤΑ $(D-L)^{-1}$; ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΩ;
- ΡΗΤΕΣ & ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ
(EXPLICIT) (POINT-IMPLICIT)
- ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΠΟΙΗΣΗ: JACOBI ή GAUSS-SEIDEL;

ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ

$$\boxed{\vec{v}^{n+1} = G\vec{v}^{n} + \vec{b}} \quad \text{ή} \quad \boxed{M\vec{v}^{n+1} = N\vec{v}^{n} + \vec{f}}$$

άρα: $\quad G = M^{-1}N \quad , \quad \vec{b} = M^{-1}\vec{f} \quad , \quad \underline{\underline{A = M - N}}$

ΔΥΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΙΚΑ:

(1) Αν το επαναληπτικό σχήμα συγκλίνει σε μια τιμή, είναι όντως αυτή η λύση του αρχικού συστήματος;

(2) Κάτω από ποιές συνθήκες συγκλίνει ένα τέτοιο επαναληπτικό σχήμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ (1):

έστω ότι σύγκλινε στο $\vec{\underset{\sim}{v}}$.

$$M\vec{\underset{\sim}{v}} = N\vec{\underset{\sim}{v}} + \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M-N)\vec{\underset{\sim}{v}} = \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A\vec{\underset{\sim}{v}} = \vec{f}$$

άρα $\quad \vec{\underset{\sim}{v}} \equiv \vec{u}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ (2):

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}^{\,n+1} &= G\vec{v}^{\,n} + \vec{b} \\ \text{(ΑΚΡΙΒΗΣ)}\quad \vec{u} &= G\vec{u} + \vec{b} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\vec{e}^{\,n+1} = G\vec{e}^{\,n}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}^{\,n+1} &= G\vec{e}^{\,n} \\ \vec{e}^{\,n} &= G\vec{e}^{\,n-1} \\ &\vdots \\ \vec{e}^{\,1} &= G\vec{e}^{\,0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{e}^{\,n+1} = [G]^{n+1}\vec{e}^{\,0}}$$

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ (G):

$$\rho(G) = \max\left(|\lambda|,\ \lambda \in \lambda(G)\right)$$

→ $\boxed{\text{ΑΝ } \rho(G)<1 \text{ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ (ΣΤΗ ΣΩΣΤΗ ΛΥΣΗ)}}$

ΔΥΟ ΣΥΝΑΦΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Η σειρά G^n (δηλαδή η $(I, G, G^2, G^3 \ldots)$) συγκλίνει στο μηδέν όταν και μόνο όταν $\rho(G) < 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\infty} G^k$ συγκλίνει όταν και μόνο όταν $\rho(G) < 1$.

Υπό αυτόν τον όρο θα ισχύουν:

- το $(I - G)$ είναι ομαλό (ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ) μητρώο
- το $\sum_{k=0}^{\infty} G^k$ συγκλίνει στο $(I - G)^{-1}$.

ΤΙ ΜΑΣ ΝΟΙΑΖΕΙ Η ΣΕΙΡΑ G^n;

$$\vec{e}^{\,n+1} = [G]^{n+1}\,\vec{e}^{\,0}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΑΓΚΑΙΑΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ

$$\text{αν} \quad G^n \to \emptyset \quad \Rightarrow \quad \rho(G) < 1$$

έστω $\lambda_1 = \max.$ ιδιοτιμη (G)
$\vec{q}_1 =$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ) $\Big\}$ $G\vec{q}_1 = \lambda_1 \vec{q}_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow G^2 \vec{q}_1 = G\lambda_1 \vec{q}_1 = \lambda_1 \underbrace{G\vec{q}_1}_{\lambda_1\vec{q}_1} = \lambda_1^2 \vec{q}_1$$

$$G^n \vec{q}_1 = \lambda_1^n \vec{q}_1 \Rightarrow \| G^n \vec{q}_1 \|_2 = \| \lambda_1^n \vec{q}_1 \|_2 = |\lambda_1^n|\,\|\vec{q}_1\|_2 = |\lambda^n|$$

άρα, για $\|G^n\| \to \emptyset$ πρεπα $\rho(G) < 1$

ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Β΄ Τμήμα):

$$\text{ότι} \quad \sum_{k=0}^{\infty} G^{k} \longrightarrow (I-G)^{-1}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ: $(I-G^{k+1}) = (I-G)(I+G+G^{2}+\cdots G^{k})$

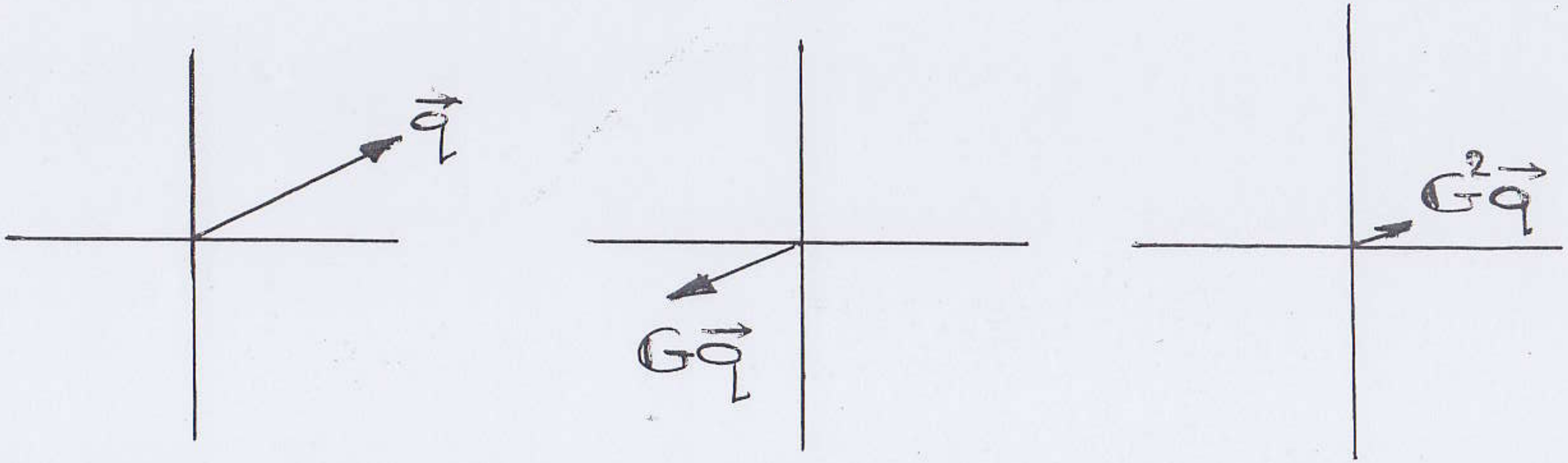
Αφού $\rho(G)<1$, είναι αδύνατο $G\vec{q}=\vec{q} \Rightarrow (I-G)\vec{q}=0$ (αλλιώς $\lambda=1$!)

$\Rightarrow (I-G)$ = ΟΜΑΛΟΣ / ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ

$$\Rightarrow \underbrace{(I-G)^{-1}(I-G^{k+1})}_{\substack{\text{Από θεώρημα 1,} \\ \text{αυτό συγκλίνει στο} \\ (I-G)^{-1} I = (I-G)^{-1}}} = I+G+G^{2}+\cdots+G^{k}$$

ΣΧΕΣΗ ΙΔΙΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ & ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{q} = \text{ιδιοδιάνυσμα του } G \\ \lambda = \text{ιδιοτιμή του } G\end{array}\right\} \quad \boxed{G\vec{q} = \lambda\vec{q}}$$



όταν $|\lambda_i|<1$ $(\forall i)$ τότε $G^n\vec{e}^{\,0} = \lambda_i^n\vec{e}^{\,0} \to 0$

όταν $n\to\infty$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ $\mathbb{G}$ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ $\vec{v}$

$\vec{v}$ = ανάλυση σε δ.β. $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N)$

Αν $|\lambda_i| < 1$, $\forall i$, τοτε $\mathbb{G}\vec{v} \longrightarrow \emptyset$

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

- ΠΡΟΤΕΙΝΩ ΕΠΑΝ. ΣΧΗΜΑ $\vec{v}^{n+1} = \mathbb{G}\vec{v}^{n} + \vec{b}$
- ΑΡΑ ΠΡΟΤΕΙΝΩ $\mathbb{G}$ ή ΔΙΑΣΠΑΣΗ $A = M - N$ με $\mathbb{G} = M^{-1}N$.
- ΓΙΑ ΝΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΡΕΠΕΙ $\rho(\mathbb{G}) < 1$
- ΟΣΟ ΔΕ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ, ΤΟΣΟ ΤΑΧΥΤΕΡΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ!!!
- ΤΑ ΠΕΡΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΙΣΧΥΟΥΝ ΑΣΧΕΤΩΣ ΑΡΧΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ $\vec{v}^{0}$

ASYMPTOTIC CONVERGENCE FACTOR

$$\rho(G)$$

ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΠΟΥ Ο <u>ΧΕΙΡΟΤΕΡΟΣ</u> ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟΝ ΕΛΑΤΤΩΝΕΤΑΙ ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΑΝΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ!

ASYMPTOTIC CONVERGENCE RATE

$$-\log_{10}(\rho(G))$$

Είναι $\vec{e}^{\,n} = [G]^n \vec{e}^{\,0}$ και $\|\vec{e}^{\,n}\| \leq \|G\|^n \cdot \|\vec{e}^{\,0}\| \Rightarrow \dfrac{\|\vec{e}^{\,n}\|}{\|\vec{e}^{\,0}\|} \leq \|G\|^n$

Έστω ότι θέλω να μειώσω το σφάλμα κατά d τάξεις,

$$\frac{\|\vec{e}^{\,n}\|}{\|\vec{e}^{\,0}\|} \leq 10^{-d}$$

Αυτό προσεγγιστικά γίνεται όταν

$$(\rho[G])^n \leq 10^{-d} \Rightarrow \boxed{n \geq \frac{d}{-\log_{10}(\rho(G))}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: (νέα σύμβολα, επίτηδες!)

Εστω ότι λύνουμε το $A\vec{x}=\vec{b}$ με το επαναληπτικό σχήμα

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{k} + a(\vec{b} - A\vec{x}^{k}) \quad , \ a \geq 0$$

ή

$$\vec{x}^{k+1} = \underbrace{(I - aA)}\vec{x}^{k} + a\vec{b}$$

ITERATION MATRIX $G_a = I - aA$

Προφανώς, η σύγκλιση εξαρτάται από το $\rho(G_a) = \rho(I - aA)$

Εστω λ_i οι ιδιοτιμές του A, όλες πραγματικές και

$$\lambda_{min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{max}$$

Τότε οι ιδιοτιμές του G_a (μ_i) θα είναι τέτοιες ώστε

$$\underbrace{1 - a\lambda_{max}}_{\text{SIGNED!}} \leq \mu_i \leq \underbrace{1 - a\lambda_{min}}_{\text{SIGNED!}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(α) $\lambda_{min} < 0 \quad , \quad \lambda_{max} > 0$

$$\Rightarrow \max(\mu_i) = 1 - \alpha\lambda_{min} > 1$$

η μέθοδος <u>αποκλίνει</u> $\forall\, \alpha > 0$

(β) <u>$\lambda_i > 0 \;, \forall i$</u> $\Rightarrow \lambda_{min} > 0$

Για να συγκλίνει πρέπει $\begin{cases} 1-\alpha\lambda_{min} < 1 \;\&\; 1-\alpha\lambda_{min} > -1 \\ 1-\alpha\lambda_{max} > -1 \;\&\; 1-\alpha\lambda_{max} < 1 \end{cases}$

$$1-\alpha\lambda_{min} < 1 \xRightarrow{\lambda_{min}>0} \alpha > 0 \quad \checkmark$$

ή: $\left.\begin{array}{l} 1-\alpha\lambda_{min} > -1 \Longrightarrow \alpha < 2/\lambda_{min} \\ 1-\alpha\lambda_{max} > -1 \Longrightarrow \alpha < 2/\lambda_{max} \end{array}\right\}$ κυριαρχεί η $\alpha < \dfrac{2}{\lambda_{max}}$.

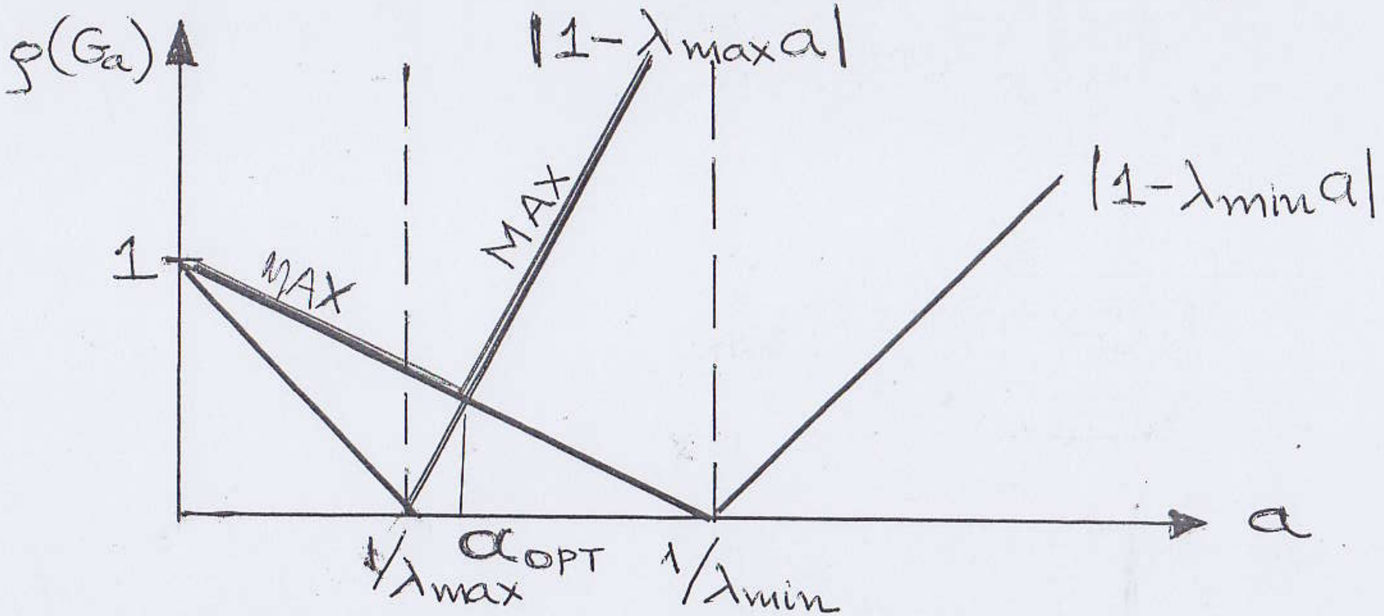
$$1-\alpha\lambda_{max} < 1 \Longrightarrow \alpha > 0 \quad \checkmark$$

Δηλαδή, η μέθοδος ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ αν $\boxed{0<a<\frac{2}{\lambda_{max}}}$

<u>ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΤΙΜΗ a :</u> (a_{OPT})

$$a_{OPT} = \arg\min_a \rho(G_a)$$

$$\rho(G_a) = \max\left\{|1-a\lambda_{min}|, |1-a\lambda_{max}|\right\}$$



$$-1+\lambda_{max}a_{OPT} = 1-\lambda_{min}a_{opt} \Rightarrow \quad a_{OPT} = \frac{2}{\lambda_{min}+\lambda_{max}}$$

$$\rho_{opt}(G_a) = 1-\frac{2\lambda_{min}}{\lambda_{min}+\lambda_{max}} = \frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}$$

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ

(α) $A \geq 0$, ΟΤΑΝ $\forall\, a_{ij} \geq 0$

(β) $A \leq B \Rightarrow a_{ij} \leq \beta_{ij}$, $\forall\, (i,j)$

(γ) ΘΕΤΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ $A > 0$, iff $\forall\, a_{ij} > 0$

ΜΕΙΟΥΜΕΝΟ ΜΗΤΡΩΟ

ΤΟ A ΕΙΝΑΙ ΜΕΙΟΥΜΕΝΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΜΗΤΡΩΟ $\mathbb{P}$ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ

$$PAP^T = \text{ΑΝΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3:

Αν $\mathbb{G}$ μη-αρνητικό μητρώο, αναγκαία & ικανή συνθήκη ώστε $\rho(\mathbb{G})<1$ είναι να ισχύουν:

$$(\mathbb{I}-\mathbb{G}) = \text{ΟΜΑΛΟ}$$
$$(\mathbb{I}-\mathbb{G})^{-1} = \text{ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟ}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ "ΙΚΑΝΗΣ"

αν $\rho(\mathbb{G})<1$, Θεώρημα 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (α) $\mathbb{I}-\mathbb{G} = \text{ΟΜΑΛΟ}$

(β) $(\mathbb{I}-\mathbb{G})^{-1} = \lim \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{G}^k$

Όμως $\mathbb{G}>0 \Rightarrow \sum_k \mathbb{G}^k>0 \Rightarrow (\mathbb{I}-\mathbb{G}^k)^{-1} = \text{ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟ}!$

Μ-ΜΗΤΡΩΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

Το A είναι Μ-μητρώο αν ικανοποιεί τις συνθήκες:

(α) $a_{i,i} > 0 \quad , \forall i$

(β) $a_{i,j} \leq 0 \quad , \forall (i,j) \ , i \neq j$

(γ) $A =$ ΟΜΑΛΟ

(δ) $A^{-1} \geq 0$

ή

(α) $a_{i,i} > 0 \quad , \forall i$

(β) $a_{i,j} \leq 0 \quad , \forall (i,j) \ , i \neq j$

(γ) $\rho(B) < 1$ όπου $B = I - D^{-1}A$

ΤΙ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΤΑ Μ-ΜΗΤΡΩΑ

JACOBI

$$D\vec{v}^{n+1} = (D-A)\vec{v}^{n} + \vec{f}$$

$$\vec{v}^{n+1} = (I-D^{-1}A)\vec{v}^{n} + D^{-1}\vec{f}$$

$$\vec{v}^{n+1} = G\vec{v}^{n} + \vec{b} \quad , \quad G = I-D^{-1}A$$

Δείξαμε ότι αν το A είναι Μ-μητρώο $\Rightarrow \rho(G)<1$

- ΓΙΑ ΝΑ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΤΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΡΕΠΕΙ

$$\rho(G)<1$$

ΚΑΤΙ ΠΟΥ ΕΞΑΣΦΑΛΙΖΕΤΑΙ ΑΝ $A =$ Μ-ΜΗΤΡΩΟ

- ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΙΑΣ ΜΔΕ $\rightarrow A$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ
(REGULAR SPLITTING)

ΟΡΙΣΜΟΣ $A = M - N$ = κανονική αν τα M^{-1} & N = μη-αρνητικά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: αν M, N μιά κανονική διάσπαση του A τότε θα είναι $\rho(M^{-1}N) < 1$ όταν & μόνον όταν

A = ΟΜΑΛΟΣ & A^{-1} = ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ: $M\vec{v}^{n+1} = N\vec{v}^{n} + \vec{f} \Rightarrow \vec{v}^{n+1} = M^{-1}N\vec{v}^{n} + M^{-1}\vec{f}$

Το επαναληπτικό αυτό σχήμα συγκλίνει πάντοτε αν τα M, N είναι κανονική διάσπαση του A και το A είναι M-μητρώο.

ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ - PRECONDITIONING

$$\vec{v}^{n+1} = G\vec{v}^{n} + \vec{b}$$

$$G = M^{-1}N \quad , \quad \vec{b} = M^{-1}\vec{f}$$

LEFT PRECONDITIONING:

$$P^{-1}A\vec{u} = P^{-1}\vec{f}$$

P = ΕΥΚΟΛΑ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ A

RIGHT PRECONDITIONING:

$$AQ(Q^{-1}\vec{u}) = \vec{f}$$

αληθινό υπόλοιπο!