



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής &
Βελτιστοποίησης

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

(7^ο Εξάμηνο Σχολής Μηχ.Μηχ. ΕΜΠ)

ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ
DIRECT DIFFERENTIATION (DD)

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Καθηγητής ΕΜΠ

kgianna@central.ntua.gr

<http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/research/>



Επίδειξη σε ένα 1Δ παράδειγμα – Το πρόβλημα:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + b_1 v + b_2 v^2 - 5 = 0$$

στο $0 \leq x \leq 1$

οριακές συνθήκες: $v(0) = 1, v(1) = 3$

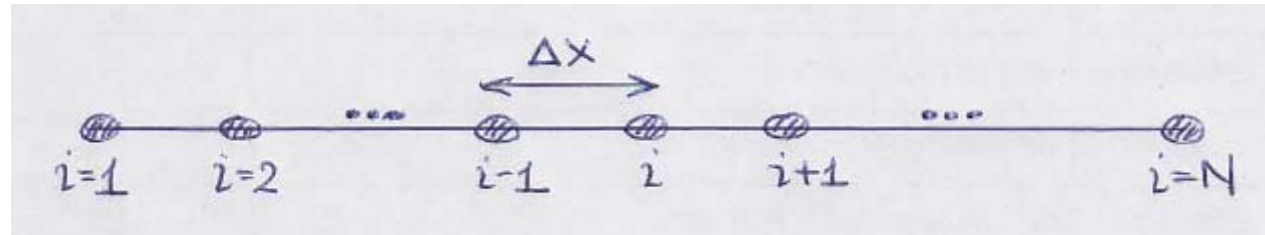
Είναι πρόβλημα γραμμικό ή μη-γραμμικό;

Γιατί έχει οριακές συνθήκες και στα δύο άκρα;

Η αριθμητική του επίλυση θέλει επαναλήψεις ή μπορεί να λυθεί «με τη μία»;

Αριθμητική Επίλυση με Πεπερασμένες Διαφορές

Διακριτοποίηση του χωρίου (γραμμής) με N ισαπέχοντες κόμβους



Διακριτοποίηση της ΣΔΕ με Πεπερασμένες Διαφορές (Γραμμικοποίηση!!!)

◆ Για $2 \leq i \leq N-1$

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} + b_1 v_i + b_2 v_i^2 - 5 = 0$$

ή

$$\left[\frac{1}{\Delta x^2} \right] v_{i+1} + \left[b_1 + b_2 v_i^{\text{OLD}} - \frac{2}{\Delta x^2} \right] v_i + \left[\frac{1}{\Delta x^2} \right] v_{i-1} = 5$$

◆ $i=1$

$$v_1 = 1$$

◆ $i=N$

$$v_N = 3$$

Μητρωϊκή Γραφή Συστήματος προς Επίλυση



... συμπληρώστε το ...



Ευθεία διαφύριση (DD) ως προς b_1 και b_2

Πρώτη ΣΔΕ:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\delta v}{\delta b_1} \right) + v + b_1 \frac{\delta v}{\delta b_1} + 2b_2 v \frac{\delta v}{\delta b_1} = 0$$

στο $0 \leq x \leq 1$

οριακές συνθήκες: $\frac{\delta v}{\delta b_1}(0) = 0$, $\frac{\delta v}{\delta b_1}(1) = 0$

Δεύτερη ΣΔΕ:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\delta v}{\delta b_2} \right) + b_1 \frac{\delta v}{\delta b_2} + v^2 + 2b_2 v \frac{\delta v}{\delta b_2} = 0$$

στο $0 \leq x \leq 1$

οριακές συνθήκες: $\frac{\delta v}{\delta b_2}(0) = 0$, $\frac{\delta v}{\delta b_2}(1) = 0$

Θα λυθούν N εξισώσεις DD. Συμφέρει;

Χρήση...



Έστω η (προς ελαχιστοποίηση) συνάρτηση κόστους

$$F = \int_{\emptyset}^1 v dx \quad (\text{min})$$

Θα είναι

$$\frac{\delta F}{\delta b_1} = \int_{\emptyset}^1 \frac{\delta v}{\delta b_1} dx$$

$$\frac{\delta F}{\delta b_2} = \int_0^1 \frac{\delta v}{\delta b_2} dx$$

Μέθοδος της απότομης καθόδου (steepest descent method)

$$b_1^{k+1} = b_1^k - \eta \frac{\delta F}{\delta b_1} (b_1^k, b_2^k)$$
$$b_2^{k+1} = b_2^k - \eta \frac{\delta F}{\delta b_2} (b_1^k, b_2^k)$$

