

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ**  
**ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (7<sup>ου</sup>)**

**(Υποχρεωτική) Εργασία για το Σπίτι (2023-24-Gradient-based Optimization)**

Η άσκηση έχει σκοπό την εξάσκησή σας στην εύρεση παραγώγων ευαισθησίας μιας συνάρτησης στόχου, σε πρόβλημα που διέπεται από (συνήθεις) διαφορικές εξισώσεις, με τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο (αλλά και τις πεπερασμένες διαφορές) και, στη συνέχεια, τη χρήση τους σε αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Το ρευστοδυναμικό πρόβλημα που πραγματεύεται η άσκηση είναι η ανάπτυξη του οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη (δηλ. ευθυγραμμισμένη με τον άξονα των  $x$ ) οριζόντια πλάκα μήκους  $L=1\text{m}$  (όλες οι μονάδες στην άσκηση ας είναι SI), λόγω διερχόμενου ρεύματος αέρα παράλληλου προς την επιφάνειά της. Τα χαρακτηριστικά της επ' άπειρο ροής (οριζόντια ταχύτητα  $U$ , πυκνότητα  $\rho$  και ιξώδες  $\mu$ ) όπως και το μήκος  $L$  είναι γνωστά και διαφοροποιούνται για κάθε ομάδα ή σπουδαστή. Διαλέξτε μόνοι/ες σας λογικές τιμές - παρακαλώ μην χρησιμοποιήσετε όλοι τα ίδια. Στην επιφάνεια της πλάκας ανοίγονται οπές, από τις οποίες μπαίνει (πρόσημο  $+$ ) / βγαίνει (πρόσημο  $-$ ) δέσμη αέρα ταχύτητας  $v_0$  κατά την κάθετη  $y$  διεύθυνση. Ο μηχανισμός εκτόξευσης-αναρρόφησης αέρα έχει ρυθμιστεί ώστε η ταχύτητα  $v_0$  να μεταβάλλεται κατά την  $x$  κατεύθυνση, με βάση τον παρακάτω νόμο:

$$v_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η παροχή του εκ-ενχόμενου ρευστού παραμένει σταθερή κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και ίση με  $Q$  ( $\text{m}^3/\text{sec}$ ), όπου  $Q$  δεδομένη ποσότητα για κάθε σπουδαστή.

Προκειμένου να υπολογιστεί η κατανομή της διαμήκους ταχύτητας  $u$  που σχηματίζεται πάνω από την πλάκα χρησιμοποιείται η λεγόμενη «ολοκληρωματική μορφή του θεωρήματος της ορμής» για το οριακό στρώμα (το να μην την έχετε διδαχθεί είναι αναμενόμενο αλλά δεν επηρεάζει την επίλυση της άσκησης). Σύμφωνα με αυτήν, το πάχος ορμής  $\delta_2$  (μονάδες:  $\text{m}$ ) του οριακού στρώματος (το  $\delta_2$  είναι μια χαρακτηριστική ποσότητα που χαρακτηρίζει το αναπτυσσόμενο οριακό στρώμα και η οποία, για πληρότητα, θα εξηγηθεί στο μάθημα) διέπεται από την εξίσωση:

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + v_0 U = \frac{\tau_w}{\rho}$$

όπου  $\tau_w$  είναι η τάση λόγω τριβής σε κάθε σημείο της επιφάνειας της πλάκας και το  $v_0$  είναι προσημασμένο ως ανωτέρω. Είναι:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

όπου  $\delta$  το πάχος του οριακού στρώματος σε κάθε θέση  $x$ .

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης δεν είναι δυνατή χωρίς την υιοθέτηση ενός μοντέλου οριακού στρώματος, δηλαδή μιας συνάρτησης ικανής να προσομοιάζει την κατά  $y$  κατανομή (velocity profile) της ταχύτητας της ροής  $u$  σε κάθε σημείο της πλάκας. Έτσι, ορίζεται η αδιάστατη συνάρτηση  $f$ :

$$\frac{u}{U} = f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

( $\delta$ , σε  $m$ , είναι το πάχος του οριακού στρώματος σε εκείνη τη θέση) η οποία πρέπει τουλάχιστον να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

Εδώ, επιλέγεται μια αρκετά απλή και αναπόφευκτα όχι τόσο ακριβής έκφραση για την  $f$ :

$$f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$$

η οποία πρακτικά σημαίνει ότι η κατανομή ταχύτητας στο οριακό στρώμα είναι ημιτονοειδής. Για μια τέτοια κατανομή ταχύτητας, η μηχανική των ρευστών (με λίγες πράξεις που προφανώς παραλείπονται) εκφράζει τις ποσότητες  $\delta_2$  και  $\tau_w$  συναρτήσει του πάχους  $\delta$  του οριακού στρώματος ως:

$$\delta_2 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\delta, \quad \tau_w = \frac{\pi \mu U}{2 \delta}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση του οριακού στρώματος προκύπτει μια σ.δ.ε. κατά τον άξονα  $x$  με άγνωστο το πάχος  $\delta(x)$ :

$$\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \frac{U}{\nu} \delta \frac{d\delta}{dx} + \frac{v_0(x)}{\nu} \delta = \frac{\pi}{2}$$

όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού. Η σ.δ.ε. συνοδεύεται από την οριακή συνθήκη  $\delta(0) = \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  μια μικρή ποσότητα μήκους (δεν θέλουμε να ξεκινά το  $\delta_2$  με μηδενική τιμή, και για αυτό βάζουμε μια πολύ μικρή τιμή σε αυτό). Άρα, στην αρχή της πλάκας, το πάχος του οριακού στρώματος είναι πολύ μικρό αλλά όχι αμελητέο. Προτείνεται  $\varepsilon = 10^{-6} m$  (ή κάτι αντίστοιχα μικρό!)

Η αριθμητική επίλυσή της οδηγεί στον υπολογισμό της ταχύτητας  $u$  καθ' ύψος και κατά μήκος της οριζόντιας πλάκας. Στη συνέχεια, είναι δυνατός ο υπολογισμός των τάσεων πάνω στη πλάκα και μέσω αυτών ο υπολογισμός της συνολικής δύναμης αντίστασης ( $F$ ) που δέχεται το στερεό από το ρεύμα αέρα.

$$F = \int_0^l \tau_w dx$$

Για την ολοκλήρωση, επαρκεί η μέθοδος του τραπεζίου. Όπως είναι φυσικό η εκτόξευση αέρα κάθετα στη ροή επηρεάζει την ανάπτυξη δυνάμεων και κατάλληλη ρύθμιση αυτού του μηχανισμού οδηγεί στην ελαχιστοποίησή τους.

### Ζητούμενα:

- 1) Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή του πρωτεύοντος προβλήματος, πόσες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές σχεδιασμού; Και ποιές; Προσέξτε τον περιορισμό ότι η παροχή του εκ-ενχυόμενου ρευστού παραμένει σταθερή και ίση με  $Q$ .
- 2) Να δημιουργηθεί κατάλληλο λογισμικό (ΣΕ ΟΠΟΙΑ ΓΛΩΣΣΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΧΕΙΡΙΖΕΣΤΕ ΚΑΛΥΤΕΡΑ), το οποίο να λαμβάνει ως είσοδο τους συντελεστές  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  της κατανομής  $v_0(x)$  και να επιλύει τη σ.δ.ε. του οριακού στρώματος υπολογίζοντας τη συνολική δύναμη αντίστασης ( $F$ ). Να γίνει διερεύνηση ανεξαρτησίας του πλήθους κόμβων του μονοδιάστατου (κατά  $x$ ) υπολογιστικού πλέγματος ως προς τον υπολογισμό της  $F$ . Να σχεδιαστούν διαγράμματα του  $\delta(x)$  και του  $u(x = l/2, y)$ .
- 3) Να υπολογιστούν οι παράγωγοι της  $F$  ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος με χρήση πεπερασμένων διαφορών (FD) για ένα σετ τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτή η φάση εργασίας εμπεριέχει διερεύνηση της τιμής της ποσότητας  $\epsilon$  (του βήματος των FD) ώστε να είναι αξιόπιστες οι παράγωγοι που υπολογίζουν οι FD.
- 4) Να αναπτυχθεί λογισμικό όπου θα υπολογίζει τις ίδιες παραγώγους με τη διακριτή συζυγή μέθοδο (DA). Να τυπωθεί το συζυγές πεδίο για το ίδιο σετ τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού.
- 5) Με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (CA), να βρεθεί η συζυγής διαφορική εξίσωση και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Προφανώς, να βρεθούν οι τύποι των παραγώγων ευαισθησίας.
- 6) Να αναπτυχθεί λογισμικό επίλυσης του συνεχούς συζυγούς προβλήματος και εύρεσης των παραγώγων ευαισθησίας. Να σχεδιαστεί το συζυγές πεδίο για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού του ερωτήματος 4. Να συγκριθούν τα πεδία που σχεδιάστηκαν με την DA και CA μέθοδο.
- 7) Να γίνει σύγκριση και σχολιασμός διαφορών στις τιμές των παραγώγων μεταξύ των τριών μεθόδων FD, DA, CA για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Να τυπωθεί ο σχετικός πίνακας με τις τιμές αυτές, όπου κάθε γραμμή θα αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή σχεδιασμού και κάθε στήλη σε μια μέθοδο εύρεσης παραγώγων. Όλα όσα ειπώθηκαν μέχρι τώρα αφορούν την «αρχική κατανομή», δεν έχει ξεκινήσει ακόμη η βελτιστοποίηση.
- 8) Να προγραμματιστεί αλγόριθμος βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της απότομης καθόδου χρησιμοποιώντας καθεμιά από τις μεθόδους DA και CA για τον υπολογισμό των παραγώγων. Στόχος της βελτιστοποίησης θα είναι η μείωση της αντίστασης λόγω τριβών ( $F$ ) που δέχεται η πλάκα. Να γίνει το διάγραμμα μεταβολής της  $F$  συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης.

## Οδηγίες για τον Τρόπο Εργασίας και το Κείμενο που θα Παραδώσετε

Γενικά:

- Προθεσμία παράδοσης: **10 Ιανουαρίου 2024**.
- Σε κάθε σχήμα ή γράφημα να υπάρχει κατάλληλη λεζάντα με πλήρη περιγραφή και σχολιασμό του.
- Γίνονται δεκτές εργασίες είτε ατομικά είτε από διμελείς ομάδες σπουδαστών. Είναι δίκαιο, για δύο ισοδύναμες εργασίες, αυτή που έγινε από ένα άτομο να έχει μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας από αυτήν που έγινε από 2 άτομα. Εκτός βέβαια αν είστε 2 αλλά κανετε μεγαλύτερη εμβάθυνση (προτιμητέο).
- Προσμετράται στο βαθμό του μαθήματος. Όπως και στα προηγούμενα θέματα, ισχύει ότι κάθε εργασία που θα παραδοθεί βαθμολογείται εκ προοιμίου με 10 αλλά καθορίζεται (ανάλογα με την ποιότητά της) το ποσοστό συμμετοχής στον τελικό βαθμό.
- Κατάθεση στο HELIOS.
- Θα υπάρχει **προφορική εξέταση μαζί με την εργασία στους ΕΑ**. Για να μην συμπέσετε όλοι/ες μαζί, μπορεί η εξέταση να γίνει προ-εξέταση, όταν δηλ. θα έχετε προχωρήσει αρκετά, οπότε δεν θα τα ξαναπούμε στο τέλος (εκτός αν χρειαστεί).