
Λύση Θέματος Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2010:

Η παροχή μάζας σε επαναληπτική βαθμίδα αξονικού στροβίλου είναι 130 kg/s καυσαερίου (τέλειο αέριο με γ=1,33 , C_p=1150 J/kgK) που εισέρχεται σε αυτή με 8,5 bar και 1310 K. Η ροή αναλύεται μονοδιάστατα σε σταθερή (για όλες τις θέσεις) ακτίνα. Η διατομή εισόδου (θέση 1) είναι ίση με 0,21 m^2. Η κινητή (2-3) και η σταθερή (1-2) πτερύγωση χαρακτηρίζονται από ίση μεταβολή εντροπίας. Επιπλέον, η βαθμίδα έχει ισεντροπικό βαθμό απόδοσης ίσο με 0,915 ενώ η κινητή πτερύγωση έχει πολυτροπικό βαθμό απόδοσης 0,9529. Από την κινητή πτερύγωση η ροή εξέρχεται με απόλυτη ταχύτητα ίση με 310 m/s. Υπολογίστε την απόλυτη γωνία ροής στη θέση 3. Διατυπώστε μια εξίσωση με άγνωστο το x=Tt3/Tt1 και, από αυτήν, υπολογίστε την τιμή του x.
(ΑΝ για την αριθμητική επίλυση χρειαστείτε επαναλήψεις, δύο είναι υπεραρκετές. Προσέξτε τα αριθμητικά σας αποτελέσματα, έχουν μεγάλη βαρύτητα στη βαθμολόγηση. Μην απαντάτε περιγραφικά χωρίς αριθμητικές πράξεις.)

(8/10 μονάδες)

Λύση Θέματος Εξετάσεων:

Για το καυσαέριο, λογιζόμενο ως τέλειο αέριο, η σταθερά του αερίου είναι

$$R = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C_p = \frac{1{,}33 - 1}{1{,}33} 1150 = 285{,}34 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Είναι επαναληπτική βαθμίδα, άρα

$$V_1 = V_3 = 310 \frac{m}{s}$$

Στη διατομή εισόδου (1) ισχύουν κατά σειρά

$$T_1 = T_{t1} - \frac{V_1^2}{2C_p} = 1310 - \frac{310^2}{2 \cdot 1150} = 1268{,}22K$$

$$p_1 = p_{t1} \left(\frac{T_1}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 8{,}5 \cdot \left(\frac{1268{,}22}{1310} \right)^{4{,}030} = 7{,}459 bar = 7{,}459 \cdot 10^5 \frac{Nt}{m^2}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{7{,}459 \cdot 10^5}{285{,}34 \cdot 1268{,}22} = 2{,}061 \frac{kg}{m^3}$$

Η κινητή (2-3, δείκτης R) και η σταθερή (1-2) πτερύγωση χαρακτηρίζονται από ίση μεταβολή εντροπίας. Έτσι (με $T_{t1} = T_{t2}$)

$$C_p \ln\left(\frac{T_{t2}}{T_{t1}} \right) - R \ln\left(\frac{p_{t2}}{p_{t1}} \right) = C_p \ln\left(\frac{T_{t3}}{T_{t1}} \right) - R \ln\left(\frac{p_{t3}}{p_{t2}} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{t3} p_{t1}}{p_{t2}^2} = \left(\frac{T_{t3}}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (1)$$

όπου για τη βαθμίδα ισχύει η σχέση

$$\frac{p_{t3}}{p_{t1}} = \left(1 - \frac{1 - \frac{T_{t3}}{T_{t1}}}{\eta_{is,\beta}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad \left(\text{σύνθεση των } \eta_{is,\beta} = \frac{T_{t1} - T_{t3}}{T_{t1} - T_{t3'}} \text{ και } T_{t3'} = T_{t1} \left(\frac{p_{t3}}{p_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

και, για την κινητή πτερύγωση, η

$$\frac{p_{t3}}{p_{t2}} = \left(\frac{T_{t3}}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{\eta_{pR}}}$$

Η αντικατάσταση των δύο τελευταίων σχέσεων στην (1) δίνει μια σχέση με μοναδικό άγνωστο το λόγο $x=\frac{T_{t3}}{T_{t1}}$. Αυτή είναι η

$$\eta_{is,\beta}x^{\frac{2-\eta_{pR}}{\eta_{pR}}}-x+1-\eta_{is,\beta}=0 \quad \Rightarrow \; 0{,}915\cdot x^{1{,}0988}-x+0{,}085=0$$

Η εξίσωση είναι μη-γραμμική, λύνεται λ.χ. επαναληπτικά με τον αλγόριθμο του σταθερού σημείου, στη μορφή

$$x^{NEW}=0{,}915\cdot\left(x^{OLD}\right)^{1{,}0988}+0{,}085$$

από τον οποίο (λ.χ. με αρχική τιμή την $x=0{,}7$ και αρκετές, όχι μόνο 2 όπως κάποιος ζητείται να κάνει στις εξετάσεις) προκύπτει η λύση της εξίσωσης $x=0{,}8938$.

Είναι πλέον θέμα απλών αντικαταστάσεων στις δοσμένες σχέσεις για να προκύψουν τα μεγέθη της ροής

$$x=\frac{T_{t3}}{T_{t1}}=0{,}8938 \;\Rightarrow\; T_{t3}=1170{,}93K$$

$$p_{t3}=5{,}17080bar$$

$$p_{t2}=8{,}3120bar$$

Η παροχή μάζας είναι $\dot{m}=130\frac{kg}{s}$, η διατομή εισόδου είναι $A_1=0{,}21m^2$, άρα για τη θέση (1) η αξονική συνιστώσα της ταχύτητας είναι

$$V_{a1}=\frac{\dot{m}}{\rho_1 A_1}=\frac{130}{2{,}061\cdot 0{,}21}=300{,}328\frac{m}{s}$$

Όμως, $V_{a3}=V_{a1}=300{,}328\frac{m}{s}$ αφού η βαθμίδα είναι επαναληπτική.

Υπολογίζεται πλέον και η απόλυτη γωνία εξόδου της ροής, ως

$$a_3=\cos^{-1}\left(\frac{V_{a3}}{V_3}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{300{,}328}{310}\right)=14{,}35^o$$

<u>Τα πιο συνηθισμένα «λάθη» & άλλες παρατηρήσεις:</u>

- Η άσκηση δίνει τον ισεντροπικό βαθμό απόδοσης της βαθμίδας και τον πολυτροπικό βαθμό απόδοσης της κινητής πτερύγωσης. «Παραδοχές» ότι ισεντροπικός βαθμός απόδοσης της βαθμίδας ισούται με τον πολυτροπικό της (με ή χωρίς δικαιολογίες του τύπου «πρόκειται για πολύ μικρή βαθμίδα») είναι λάθος.

- Η χρήση της εξίσωσης του Bernoulli είναι παντελώς λάθος. Το ρευστό είναι συμπιεστό, φαίνεται από τις τιμές πιέσεων κλπ.

- Το να μη χρησιμοποιηθεί η γνωστή σχέση $T_{t1} = T_{t2}$ (άεργος μεταβολή στη σταθερή πτερύγωση) προκαλεί αδυναμία διαχείρισης της εξίσωσης ισότητας εντροπιών. Κάποιοι, παρότι ήξεραν να διατυπώσουν την εξίσωση μεταβολών εντροπίας στις δύο πτερυγώσεις, «κόλλησαν» εκεί επειδή απλά δεν χρησιμοποίησαν ότι $T_{t1} = T_{t2}$ και δεν μπόρεσαν να κάνουν τις σχετικές-προφανείς απλοποιήσεις.

- Επίσης, εμπόδιο για την επίλυση της άσκησης αποτελεί η μη χρησιμοποίηση του ότι η βαθμίδα είναι επαναληπτική, άρα τα διανύσματα της ταχύτητας είναι ίσα στην είσοδο και στην έξοδο της βαθμίδας. Το ότι η βαθμίδα είναι επαναληπτική θα το χρησιμοποιήσετε στην αρχή της άσκησης ($V_1 = V_3$) αλλά και στο τέλος ($V_{a3} = V_{a1}$).

- Η διατομή της βαθμίδας δεν είναι σταθερή στις θέσεις (1), (2) και (3). Δεν δίνεται κάτι τέτοιο! Άρα, τη σχέση της παροχής από την οποία υπολογίζεται η αξονική συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να εφαρμοστεί στη θέση (1) αφού μόνο εκεί δίνεται η τιμή της διατομής.

- Η άτακτη παράθεση τύπων που δεν καταλήγουν σε τελική σχέση δεν αποτελούν λύση της άσκησης.

- Όμοια, η μη επίλυση της γραμμικής εξίσωσης (αν δεχτούμε ότι την εξίσωση την έχετε βρει) σας στερεί πολύτιμες μονάδες. Αποτελεί και αυτή τμήμα της λύσης που δίνει ο μηχανικός. Και, στο κάτω-κάτω, είναι χρήσιμο λ.χ. να δείξουμε ότι ξέρουμε αν το x πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο της μονάδας (ανάλογα αν επιλύουμε τη ροή σε συμπιεστή ή στρόβιλο)…

<u>ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Τα οκτασέλιδα τυπολόγια που επιτρέπεται να έχετε μαζί σας στις εξετάσεις πρέπει να είναι άγραφα. Περιέχουν ότι ακριβώς χρειάζεστε για να λύσετε τα θέματα των εξετάσεων. Δεν υπάρχει λόγος να ρισκάρετε …