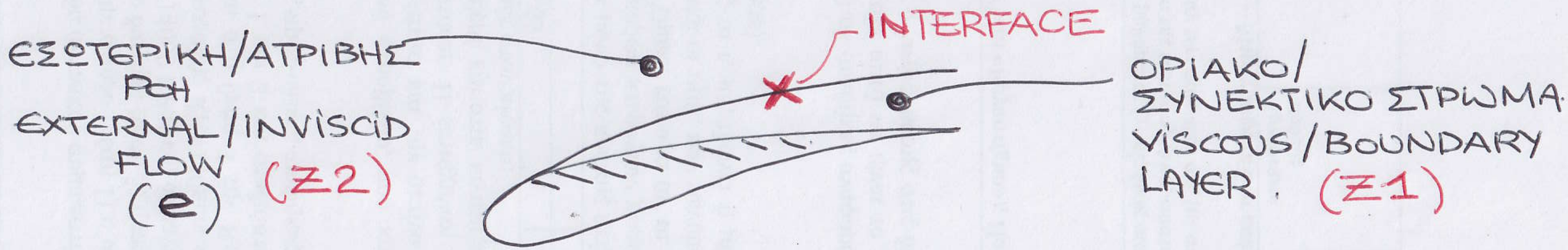
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

INTEGRAL BOUNDARY LAYER METHODS. (IBLM)

▶ Το ΔΙΖΩΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΡΟΗΣ (ΤΟΥ PRANDTL)



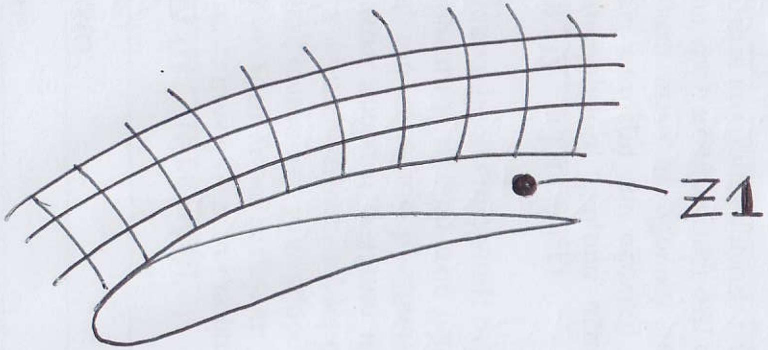
(Z2) Επιλύτης Εξισώσεων Euler ή
Επιλύτης Δυναμικής (Potential) ροής ή

(Z1) Μιά γρήγορη (χωρο-προέλασης / space-marching) μέθοδος επίλυσης των οριακών στρωμάτων (ο.σ).

INTERFACE? Δύο δυνατές τεχνικές !!

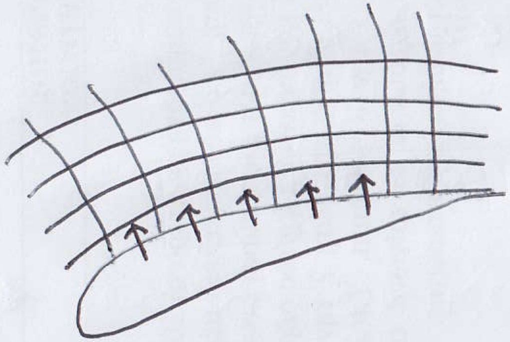
$\boxed{\text{ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΙΣ (Z1) \& (Z2)}}$

ΤΕΧΝΙΚΗ 1:

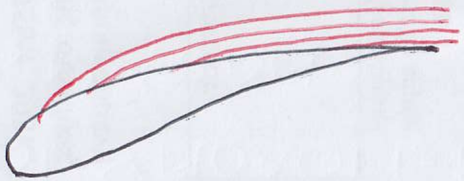


- Επαναπλεγματοποιηση / Remeshing.
- Μετατοπιση (displacement) του interface σε κάθε κύκλο.

ΤΕΧΝΙΚΗ 2:

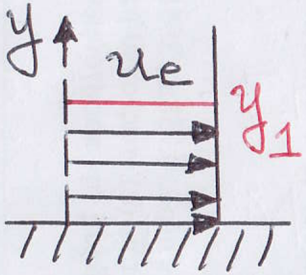


- Σταθερό πλέγμα σε όλο το χωρίο.
- Ταχύτητες αναπνοής (transpiration velocities) συναρτήσει του πάχους μετατόπισης του Ο.Σ.
- Τοπικά: suction or blowing

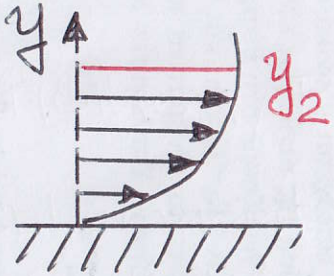


ΠΑΧΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ – DISPLACEMENT THICKNESS

Ατριβής ροή:



Ο.Σ.:



$$\dot m\Big|_0^{y_1} = \rho_e u_e y_1 \quad \longleftrightarrow \quad \dot m\Big|_0^{y_2} = \int_0^{y_2}\rho u\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{y_2}\rho u\,dy = \rho_e u_e y_1 = \rho_e u_e \underbrace{(y_1-y_2)}_{-\delta_1} + \rho_e u_e y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{y_2}\frac{\rho u}{\rho_e u_e}dy = -\delta_1 + y_2 \Rightarrow \delta_1 = \int_0^{y_2}\frac{\rho_e u_e}{\rho_e u_e}dy - \int_0^{y_1}\frac{\rho u}{\rho_e u_e}dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_1 = \int_0^{\delta \text{ ή } \infty}\left(1-\frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right)dy}$$

ελλειμμα (deficit) μεταφερόμενης μάζας

ή, για ασυμπίεστο ρευστό:

$$\boxed{\delta_1 = \int_0^{\infty}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy}$$

ΠΑΧΟΣ ΟΡΜΗΣ δ_2:

MOMENTUM THICKNESS

$$\boxed{\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}$$, ασυμπίεστο: $$\boxed{\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}$$

έλλειμμα (deficit) μεταφερόμενης ορμής.

ΠΑΧΟΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ δ_3:

ENERGY THICKNESS

$$\boxed{\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy}$$, ασυμπίεστο: $$\boxed{\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy}$$

έλλειμμα (deficit) μεταφερόμενης κινητικής ενέργειας

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΧΗ

κινηματικό πάχος ορμής $\delta_{2k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$

κινηματικό πάχος ενέργειας: $\delta_{3k} = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy$

κινηματικό πάχος μετατόπισης: $\delta_{1k} = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$

στο ασυμπίεστο:

$$\delta_1 \equiv \delta_{1k}$$

$$\delta_2 \equiv \delta_{2k}$$

$$\delta_3 \equiv \delta_{3k}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Πόσες – Ποιές ?
- Ο.Ε. Διαμήκους ορμής (Ο.Ε.Δ.Ο)

$$\int_0^\delta (\text{διαμήκης ορμή})\,dy = 0$$

- διάφορες "ροπές" της

$$\int_0^\delta u^m y^n (\text{διαμήκης ορμή})\,dy = 0.$$

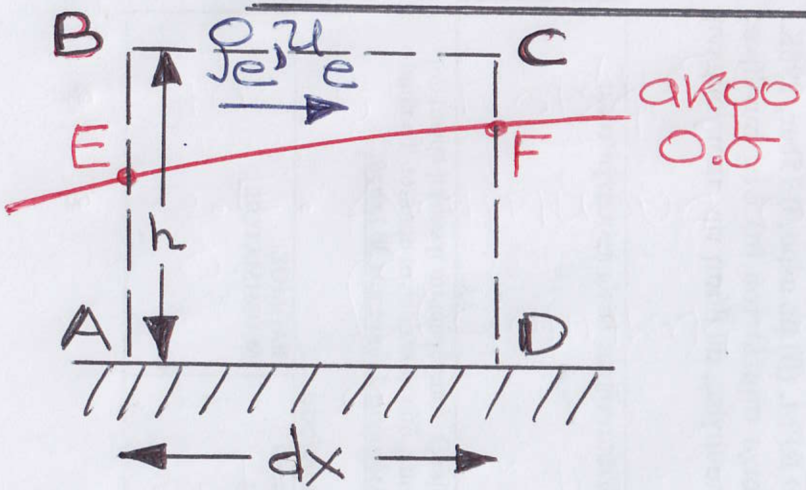
λ.χ: $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$ ολοκλ. εξίσωση Κινητικής Ενέργειας (Ο.Ε.Κ.Ε.)

- Απώλεια πληροφορίας κατά την ολοκλήρωση

Εμπειρική πληροφορία.

Δεδομένα Εξωτερικής Ροής

Ο. Ε. ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΟΡΜΗΣ



ισολογισμός παροχής:

$$\dot m_{DC} - \dot m_{AB} = \frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u\,dy\right]dx$$

$$\dot m_{BC} = \rho_e v_h\,dx$$

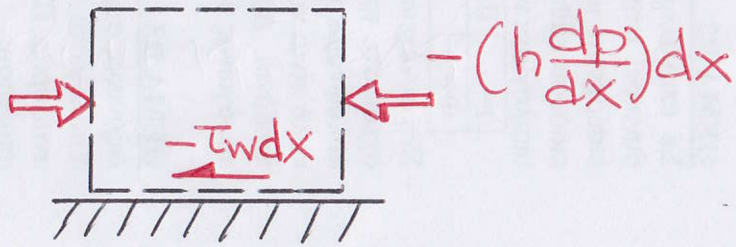
αλλά: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = \emptyset \xRightarrow{\int_y} \rho_e v_h = -\frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\,dy$

ισολογισμός διαμήκους ορμής:

$$\dot M_{DC} - \dot M_{AB} = \frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u^2 dy\right]dx$$

$$\dot M_{BC} = \rho_e u_e v_h\,dx \longrightarrow = -u_e \frac{d}{dx}\int_0^h \rho u\,dy\;dx$$

άλλες δυνάμεις:



$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u^2 dy\right] - u_e \frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u\, dy\right] = -h\frac{dp}{dx} - \tau_w}$$

Ο.Ε.Δ.Ο

στρωτό ή τυρβώδες? $\rightarrow \tau_w$

- η κλίση πίεσης από την εξωτερική ροή

$$\boxed{\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp}{dx}}$$

- στόχος, αντί του $\frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u^2 dy\right]$, εμφάνισε το $\frac{d}{dx}\left[\int_0^h \rho u(u-u_e)dy\right]$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\int_0^h \rho u(u_e-u)dy\right]}_{\rho_e u_e^2 \delta_2} + \frac{du_e}{dx}\cdot\underbrace{\left[\int_0^h (\rho_e u_e - \rho u)dy\right]}_{\rho_e u_e \delta_1} = \tau_w$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}(\rho_e u_e^2 \delta_2) + \frac{du_e}{dx}\rho_e u_e \delta_1 = \tau_w}$$

Ο.Ε.Δ.Ο.

Συντ/στης Μορφής $\longrightarrow$ Shape Factor

$$\boxed{H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}}$$

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\delta_2(H_{12}+2) + \frac{\delta_2}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dx} = \frac{c_f}{2}}$$

Ο.Ε.Δ.Ο

συντ/στής τριβής : friction coefficient

$$\boxed{c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2}}$$

Ο.Ε. ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\rho_e u_e^3 \delta_3\right] + \rho_e u_e^2 \frac{du_e}{dx}\underbrace{(\delta_1 - \delta_{1K})}_{=\emptyset \text{ για ασυμπίεστο!}} = \int_0^h \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy = \int_0^h \tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

ΟΕΚΕ

Παράγοντας καταστροφής dissipation coefficient

$$\boxed{c_D = \frac{1}{\rho_e u_e^3}\int_0^h \tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ροή:
- μόνιμη
- ασυμπίεστου ρευστού
- τύπου flat plate → επίπεδη πλάκα $\frac{du_e}{dx} = \frac{dp}{dx} = 0$

Ο.Ε.Δ.Ο. →
$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2}}$$

Υπόθεση: Μονοπαραμετρική κατανομή ταχύτητας

$$\boxed{u = u(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}}$$

Εδώ, έστω :
$$\boxed{\frac{u}{u_e} = \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)}$$

ΒΗΜΑ 1: "Έλεγχος" της κατανομής $\frac{u}{u_e}$ στα $y=0$ και $y=\delta$!

ΒΗΜΑ 2 : Εκφραση καθε ολοκληρωματικής ποσότητας συναρτήσει **μιας** (της ιδιας!) ποσότητας.

λ.χ. $\tau_w = \mu \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \Rightarrow \tau_w = \dfrac{1}{\delta}\,\mu u_e \dfrac{\pi}{2}$

$$\delta_1 = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy \Rightarrow \delta_1 = \delta\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta}\frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)dy \Rightarrow \delta_2 = \delta\,\frac{4-\pi}{2\pi}$$

Παρατήρηση: $\dfrac{\delta_1}{\delta_2} = H_{12} =$ σταθ, ανεξ(δ, άρα του x)!

Ο.Ε.Δ.Ο. $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{d\delta^2}{dx} = \dfrac{2\pi^2\nu}{(4-\pi)u_e}}$

ολοκλήρωση με $\delta(x=0)=0$ $\leadsto$ $\dfrac{\delta}{x} = \left[2\pi^2\dfrac{1}{4-\pi}\right]^{1/2}\Big/Re_x^{1/2} = \dfrac{4{,}795}{Re_x^{1/2}}$

$\Rightarrow C_f = \dfrac{0{,}6551}{Re_x^{1/2}}$ ενώ λύση Blasius: $C_f = \dfrac{0{,}64}{Re_x^{1/2}}$

ΕΝΑ ΣΧΟΛΙΟ : Γιατί, στο παραπάνω πρόβλημα, πρέπει όντως να ισχύει $\boxed{\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \emptyset}$?

x-ορμή συνεκτική ροή $\left.\right\}$ $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

x-ορμή ατριβής ροή $\left.\right\}$ $\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ at $y = \emptyset$ $(u_w = v_w = 0)$: $\underbrace{\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}}_{\text{here: } \frac{du_e}{dx} = \emptyset} + \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \emptyset$

• —

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1΄

Επαναλάβετε το ίδιο με την Ο.Ε.Κ.Ε
(αντί της Ο.Ε.ΔΟ.)

<u>Βοηθητικές σχέσεις:</u>

$$\int_{\alpha}^{\beta} \cos^2(kx)\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin^2(kx)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin(kx)\,dx = \left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin^3(kx)\,dx = \left[-\frac{3\cos(kx)}{4k} + \frac{\cos(3kx)}{12k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

ΛΥΣΗ: στον πίνακα!

ΤΕΛΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u_e^3\delta_3\right)=\nu\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \Rightarrow \frac{u_e^3}{2\nu}\cdot\frac{d\delta_3}{dx}=\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

$$\rightarrow \delta_3=\frac{2\delta}{3\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u_e^2\pi^2}{8\delta}$$

$$\rightarrow \frac{d(\delta^2)}{dx}=23{,}2\frac{\nu}{u_e}$$ με Ο.Ε.Κ.Ε.

αντί της $$\frac{d(\delta^2)}{dx}=22{,}9\frac{\nu}{u_e}$$ με Ο.Ε.Δ.Ο.

ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ : ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΓΡΑΦΗ Ο.Ε.Κ.Ε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\rho_e u_e^3 \delta_3\right) = \rho_e u_e^3 C_D \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_e u_e^3 \frac{d\delta_3}{dx} + \delta_3 \frac{3}{2}\rho_e u_e^2 \frac{du_e}{dx} = \rho_e u_e^3 C_D$$

$$\Rightarrow u_e \frac{d\delta_3}{dx} + 3\delta_3 \frac{du_e}{dx} = 2u_e C_D$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\delta_3}{dx} + 3\frac{\delta_3}{u_e}\frac{du_e}{dx} = 2C_D}$$

Δείξτε ότι :

$$\boxed{\delta_2 \frac{dH_{32}}{dx} + \frac{\delta_2 H_{32}}{u_e}\frac{du_e}{dx}(1-H_{12}) = 2C_D - \frac{c_f}{2}H_{32}}$$

$$, H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}$$

HINT: $\left.\begin{matrix}\delta_2 \cdot \text{ΟΕΚΕ} \\ \delta_3 \cdot \text{ΟΕΔΟ}\end{matrix}\right\}$ $\ominus$ $\rightarrow$ ...

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

- ιδανικό αέριο
  ισεντροπική ροή $\Big\}$ $\dfrac{1}{\rho_e}\dfrac{d\rho_e}{dx} = -\dfrac{M_e^2}{u_e}\dfrac{du_e}{dx}$

- Ο.Ε.Δ.Ο.

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\delta_2\left(H_{12}+2-M_e^2\right) = \frac{c_f}{2}$$

- Ο.Ε.Κ.Ε.

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \left(2\frac{\delta_\rho}{\delta_3}+3-M_e^2\right)\frac{\delta_3}{u_e}\frac{du_e}{dx} = 2C_D$$

όπου $\boxed{\delta_\rho = \int_0^\delta \frac{u}{u_e}\left(1-\frac{\rho}{\rho_e}\right)dy}$ πάχος πυκνότητα[ς]

Εναλλακτικά:

$$\delta_2\frac{dH_{32}}{dx} + \frac{\delta_2}{u_e}\frac{du_e}{dx}\left\{2H_{\rho 2}+H_{32}(1-H_{12})\right\} = 2C_D - H_{32}\frac{c_f}{2}$$

Shape Factors: $H_{12} = \dfrac{\delta_1}{\delta_2}$, $H_{32} = \dfrac{\delta_3}{\delta_2}$, $H_{\rho 2} = \dfrac{\delta_\rho}{\delta_2}$